SPT 21世纪高等院校教材

# 高等几何

周兴和 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

# 高　等　几　何

周兴和 编

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书是作者从事高等几何教学 20 余年经验的结晶，主要内容包括射影平面、射影变换、变换群观点、二次曲线理论、几何学简史等．本书科学体系严谨，内容精炼，深入浅出、语言生动，图文并茂，易教易学．同时，本书还配备了作者授课时用的电子教案，以供广大教师、学生参考．

本书可作为高等院校数学专业本科生和专科生的教材，亦可供有关人员参考．


**图书在版编目（CIP）数据**

高等几何 / 周兴和编．— 北京：科学出版社，2003.9
21 世纪高等院校教材
ISBN 7-03-011617-8

Ⅰ. 高 ··· Ⅱ. 周 ··· Ⅲ. 高等几何 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 051897 号

责任编辑：林 鹏 王 静 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 9 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2005 年 6 月第二次印刷 印张：11 1/2
印数：7 001—9 001 字数：214 000

**定价： 20.00 元 (含光盘)**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

# 前 言

高等几何是高等院校数学类专业的重要基础课之一，与数学分析、高等代数一起，被称为“前三高”．本课程的主旨在于拓展读者的几何空间知识，学习变换群观点，进而达到训练理性思维能力，增强数学审美意识，提高数学修养的目的，为读者进一步的数学学习和未来的几何学教学与研究打下良好的基础．

编者有着为高校全日制和成人教育数学专业讲授高等几何 20 余年的经历，在教学中积累了不少收获和体会．本教材的编写动力主要来自两个方面：一是高等学校教育教学改革的需要，多年来，学时越胀越多，教材越写越厚，不同课程之间联系淡薄，这已经成为培养创新人才的一大障碍，必须要精简学时，更新教学内容，让学生有更多的自我学习时间和更大的自我思考空间．学时减下来之后，就必须认真研究教什么和如何教，本教材力图在这方面做些尝试．第二个动力是，在编者多年的教学中，尽管从不少教材中吸取了很多教益，但是对各教材也都有不满足感，因此想对教学内容改革做一些尝试．为此，我重新阅读了每一次的讲稿，从中搜寻闪光点，对内容、材料、例题、习题尤其是科学体系进行重新审视，力求做到理论系统严格而又简洁明快，浅显易懂．

本教材的前四章为课堂教学内容，以平面射影几何为主，同时介绍 Klein 变换群观点．当然，作为高等几何课程，除了系统介绍射影几何知识、变换群思想而外，还应该对非欧几何以及几何基础等作一些介绍．作为这方面的改革尝试，我们增加第五章“几何学寻踪”，既讲述历史、介绍著名数学家，也介绍一些几何学知识，作为学生的课外阅读材料．本教材是南京师范大学“十五”重点建设的教材之一，已在南京师范大学等校经过全日制教学和成人教育教学多次试用，这次出版前又根据试用情况作了一些必要的修订，编者授课用的电子教案也随同教材一并出版发行，希望能够对使用本教材的教师和学生起一定的帮助作用．

任何教材都会不同程度地限制教师和学生的创造力，因此教材只能是一个教学蓝本，是提供教师和学生进行再创造的一个平台．此外，本教材也必然存在一些错误和疏漏之处，恳请读者和使用本教材的教师给予批评指正，以便进一步修改、完善．

编者首先要感谢南京师范大学教学委员会“十五”重点教材评审委员会的专家们，谢谢他们评审中提出的宝贵意见；在本教材编写思想的形成初期，上饶师范学院的熊华平教授、南京师范大学的卞桂云、管义桂教授等曾与编者进行过许多建设性的讨论；在本教材编写过程中，编者曾获得南京师范大学数学与计算机科学学院

的陈怀惠、杨润生、李君华、高洪俊、叶惟寅、涂荣豹教授等给予的帮助，杨明升副教授使用本教材授课并对编写工作提出了修改建议；南京师范大学数学与应用数学专业 1999 级、 2000 级不少本科生对本教材提出过一些好的意见，在教材出版之际编者对他们一并表示感谢. 科学出版社的林鹏、杨波等先生对本教材的编写出版给予了热情的关心，尤其是杨波先生为本教材的出版付出了大量辛勤的劳动并提出了不少有益的建议，编者谨向他们表示衷心的感谢.

编 者

2003 年 5 月

于南京师范大学随园

# 目　　录

# 第一章　射 影 平 面

本章从欧氏平面的拓广开始，定义射影平面，引进齐次坐标、对偶原则等概念，并给出 Desargues 透视定理，是学习平面射影几何的基础.

## §1.1　拓 广 平 面

关于平面上两直线的位置关系，在我们以前所学习的几何学中，最熟知的两个概念是 “相交” 与 “平行”. 所谓 “平行” 乃是 “不相交”. 但是，在实际生活中，我们几乎从来没有看到过所谓的平行直线. 比如，在我们的眼中，两条笔直的铁路钢轨看上去好像是在非常远的地方相交. 又如，谁都会认为一张照片与它所反映的实物非常地 “像”，但是仔细比较就可以看出，实物中所有的平行直线在照片上都表现为有规则的相交. 显然，实物中平行于地面的直线在照片中都相交于 “地平线”，而地平线则是假设出来的. 事实上，上述这些在几何中都属于中心射影.

### 一、中心射影

中心射影又叫做透视对应，是射影几何的基本方法. 我们来尝试在欧氏空间进行中心射影.

1. 直线到直线的中心射影

**定义 1.1**　设 $l,l'$ 为两条相异的共面直线，$O$ 为平面上不属于直线 $l,l'$ 的一个定点. 则由此确定了直线 $l$ 到 $l'$ 的一个 **中心射影**. 若 $O$ 与 $l$ 上一点 $P$ 的连线 $OP$ 与 $l'$ 有交点 $P'$, 则称 $P'$ 为 $P$ 在 $l'$ 上的以 $O$ 为 **投射中心** 的 **中心射影**(如图 1.1). 直线 $OP$ 称为 **投射线**.

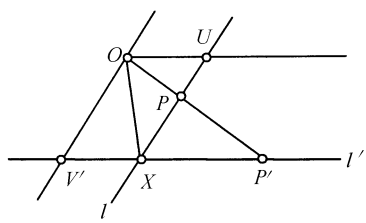



图 1.1

我们称 $P'$ 为直线 $l$ 上的点 $P$ 在 $l'$ 上的 **像点**, 而称 $P$ 为 $P'$ 的 **原像**. 显然，中心射影是相互的， $P$ 也是点 $P'$ 在直线 $l$ 上的像点. 若 $l$ 与 $l'$ 有交点 $X$, 本书常用

记号 $X = l \times l'$ 表示 $l$ 与 $l'$ 的交点为 $X$. 显然 $X$ 为中心射影下的 **自对应点**, 自对应点也称为 **不变点**. 易见，中心射影与投射中心的选取有关.

显然，在直线 $l$ 上存在一点 $U$, 使得直线 $OU//l'$, 这样， $OU$ 与 $l'$ 没有交点，即点 $U$ 在 $l'$ 上没有像，称 $U$ 为 $l$ 上的 **影消点**. 同样，在 $l'$ 上也存在影消点 $V'$. 由于影消点的存在，直线到直线的中心射影不是双射 [1]) .

2. 平面到平面的中心射影

**定义 1.2**　设 $\pi, \pi'$ 为两个相异的平面， $O$ 为不在此二平面上的取定的一点. 则由此确定了平面 $\pi$ 到 $\pi'$ 的一个 **中心射影**. 对于 $\pi$ 上的一点 $P$, 若直线 $OP$ 与平面 $\pi'$ 有交点 $P'$, 则称 $P'$ 为 $P$ 在 $\pi'$ 上的以 $O$ 为 **投射中心** 的 **中心射影**. 直线 $OP$ 称为 **投射线**(如图 1.2).

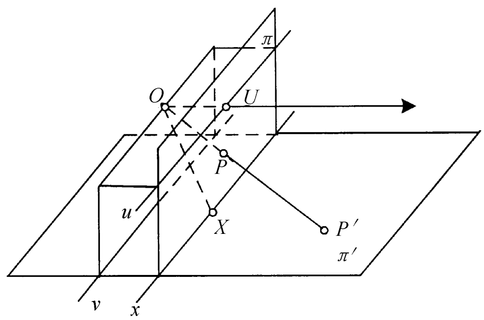



图 1.2

我们称 $P'$ 为 $P$ 的 **像点**, $P$ 为 $P'$ 的 **原像**. 同样，平面到平面的中心射影也是相互的. 设 $\pi \times \pi' = x$(表示 $x$ 为平面 $\pi$ 与平面 $\pi'$ 的交线), 则直线 $x$ 上的任一点 $X$ 都是此中心射影的 **不变点**, 进而，直线 $x$ 为此中心射影下的 **不变直线**. 平面之间的中心射影也与投射中心 $O$ 的选取有关.

显然，在平面 $\pi$ 上存在一条直线 $u$, 其上任一点 $U$ 与 $O$ 的连线 $OU$ 平行于 $\pi'$, 于是， $U$ 在此中心射影下没有像，是影消点，直线 $u$ 在 $\pi'$ 上没有像，称为 **影消线**. 同样，在平面 $\pi'$ 上也存在一条影消线 $v'$. 由于影消线的存在，平面之间的中心射影不是双射.

### 二、无穷远元素

影消点、影消线存在的根本原因是，在欧氏空间中，相互平行的直线没有交点. 使得中心射影成为一一对应的一个自然的途径是给平行直线添加交点，即要对欧氏空间进行改造，通过添加一些新的元素对欧氏空间加以拓广. 添加新元素的基

---

1) 既是单射 (injection) 又是满射 (surjection) 的映射称为双射 (bijection), 也称为一一对应.

本约束是不破坏点和直线的关联关系以及下列两个基本的几何事实:

(i) 两相异直线相交,有且只有一个交点;

(ii) 通过两相异点有而且只有一条直线.

**约定 1.1** (1) 在每一条直线上添加惟一一个点,此点不是该直线上原有的点,称为 **无穷远点** 或 **理想点**.

(2) 相互平行的直线上所添加的无穷远点相同,不平行的直线上添加的无穷远点不同.

(3) 平面上添加的全体无穷远点的集合为一条直线,称为 **无穷远直线** 或 **理想直线**.

区别起见,将平面上原有的点称为 **有穷远点** 或 **通常点**. 常用记号 $P_\infty$ 等表示无穷远点. 把平面上原有的直线称为 **有穷远直线** 或 **通常直线**. 常用记号 $l_\infty$ 等表示无穷远直线.

无穷远点和无穷远直线统称为 **无穷远元素**. 显然,无穷远直线上的点的个数等于平面上经过一个通常点的直线数. 容易看出,添加无穷远元素之后,上述两个中心射影都是双射.

### 三、拓广平面

显然,添加无穷远点之后的直线不再是欧氏直线,添加无穷远直线之后的平面也不再是欧氏平面,我们有

**定义 1.3** 通常点和无穷远点统称为 **拓广点**; 添加无穷远点之后的直线和无穷远直线统称为 **拓广直线** 或 **射影仿射直线**; 添加无穷远直线之后的平面称为 **拓广平面** 或 **射影仿射平面**.

**定理 1.1** 在拓广平面上,

(1) 两个相异的拓广点确定惟一一条拓广直线 (其连线);

(2) 两条相异的拓广直线确定惟一一个拓广点 (其交点).

于是,在拓广平面上任意两条相异直线总是相交的,平行与相交的差别被统一为相交. 可以说,美术家们都是在拓广平面上进行创作的,所有的照片也都被洗印在拓广平面上.

定理 1.1 说明,在拓广平面上,拓广点之间、拓广直线之间有着平等的地位,而且本定理对于拓广点和拓广直线而言是对称的. 这与通常欧氏平面相比,发生了质的变化,暗示了射影几何的一个本质思想.

### 四、拓广直线、拓广平面的基本性质与拓扑模型

与欧氏直线、欧氏平面相对比,我们来研究拓广直线、拓广平面的一些基本性质.

1. 拓广直线

与欧氏直线相比，拓广直线的内在性质产生了质的变化.

(1) 拓广直线的封闭性. 图 1.3 示意了圆周与拓广直线之间的一个双射，因此可以将欧氏平面上的圆周取作为拓广直线的一种拓扑模型.

由此，添加无穷远点之后的通常直线上点的个数也等于平面上经过一个通常点的直线数. 从而，每一条拓广直线都有同样多的点.

事实上，由上述双射不难看出，欧氏平面上的任何椭圆进而任何凸闭曲线都可以作为拓广直线的拓扑模型.

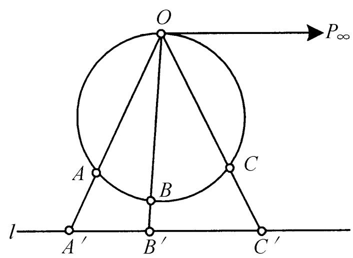



图 1.3

(2) 拓广直线上的点之间的 **分离关系**. 欧氏直线上点之间通常的顺序关系在拓广直线上显然不再成立. 比如，欧氏直线上一点将直线划分为两个部分，但拓广直线上任一点不可能划分直线为两个部分. 又如，欧氏直线上相异二点可以区分出一个线段，这样的事实在拓广直线上显然不再成立. 换句话说，“介于”一词在拓广直线上不再有用武之地. 为描述拓广直线上点之间的关系，我们引入“分离”概念. 如图 1.4, 点偶 $C, D$ 分离点偶 $A, B$. 又如图 1.5, $C, D$ 不分离点偶 $A, B$.

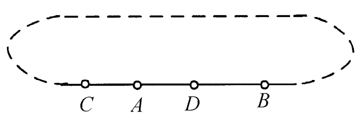



图 1.4

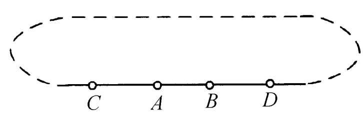



图 1.5

由拓广直线的封闭性，不难想像，相异两点 $A, B$ 将拓广直线划分成两个不同的部分，而分离与不分离即描述了下述现象：

分离：当 $C, D$ 分别处于被 $A, B$ 所划分的不同部分上时；

不分离：当 $C, D$ 处于被 $A, B$ 所划分的同一部分上时.

由上述，线段概念在拓广直线上不再存在，因此在拓广直线上没有距离概念.

2. 拓广平面

由于添加了无穷远直线，拓广平面与欧氏平面相比，空间的内在性质产生了质

的变化.

(1)　拓广平面的封闭性.

在欧氏平面上，任一直线划分平面为两个不同的区域 (即对于不同区域的两个点，不可能找到一条连接这二点的连续曲线，使之与边界不相交); 在拓广平面上，任一直线不可能划分平面成两个不同的区域 (如图 1.6).

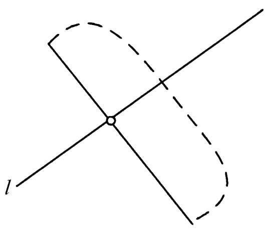



图 1.6

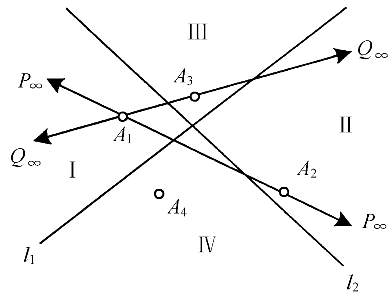



图 1.7

在欧氏平面上任二相交直线划分平面成四个不同的区域；在拓广平面上，任二相交直线划分平面成两个不同的区域. 为体会这一点，如图 1.7, 直线 $l_1, l_2$ 将平面划分为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分. 利用拓广直线的封闭性不难说明，对于拓广平面，Ⅰ与Ⅱ；Ⅲ与Ⅳ分别为同一区域.

由于上述的原因，在拓广平面上共点的四条直线，也有“分离”概念.

(2) 拓广平面的拓扑模型

模型一，叠合对径点的球面. 如图 1.8, 将一个球面放在一张拓广平面 $\pi$ 上，使得南极与平面相切. 以球心 $O$ 为投射中心，则显然球面上一条直径的对径点 (直径的两个端点) 对应于拓广平面上惟一一个点，赤道上的对径点对应着无

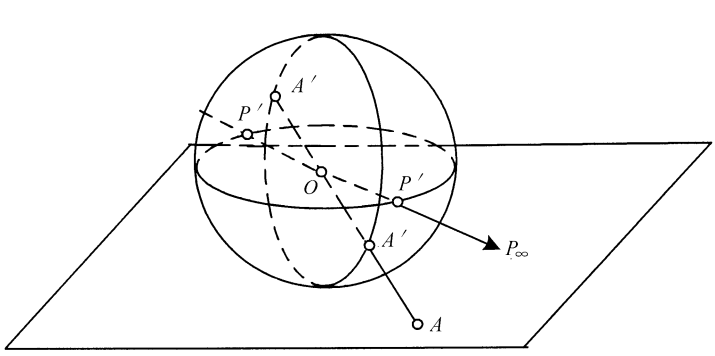



图 1.8

穷远直线上的点，球面上的大圆对应为拓广平面上的直线. 这种对应是球面上对径点的集合到拓广平面的一个双射. 于是可以把叠合对径点的球面作为拓广平面的一个拓扑模型.

模型二，三维欧氏空间过原点的直线的集合 (原点除外). 由模型一，可以把三维欧氏空间过原点的每一条直线上的点去掉原点之后看成一个等价类，作为拓广平面上的一个点，构成拓广平面的一个模型.

模型三，叠合赤道上对径点的半球面. 由模型一出发 (图 1.9), 将含北极的半球面去掉，则除赤道上的对径点对应于无穷远直线上的点而外，半球面的点与拓广平面除无穷远直线外的点一一对应，这是拓广平面的又一个拓扑模型.

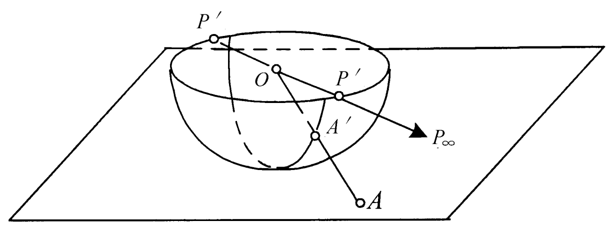



图 1.9

模型四，叠合周界上对径点的圆盘. 由模型三，我们把半球面看成由橡皮膜制成，将之拉伸、压平，则变成一个实心的圆盘，叠合其周界上的对径点，则得到拓广平面的圆盘模型.

观察图 1.10 的圆盘模型，其中的 $A, A; B, B$ 分别是对径点，因此是拓广平面上的同一个点. 将其上 $ABAB$ 的一块剪下，因为它是橡皮膜，又可以将其拉伸使其变成一个矩形 (图 1.11), 当我们将两端相同的点粘起来后，就得到了著名的 Möbius 带，这是一个不可定向的曲面，只有一个面. 因为它是拓广平面上的一块，从而拓广平面也是不可定向的.

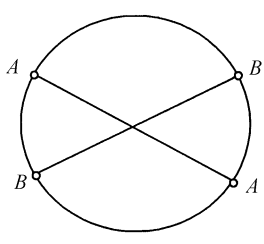



图 1.10

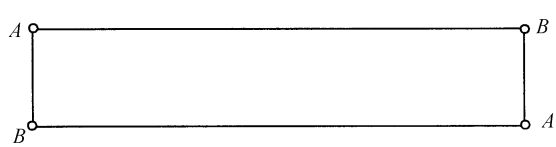



图 1.11

### 五、射影基本形

平面射影几何涉及到如下两对射影基本形，他们分别是关于点和直线的.

(1)　**点列**. 同一直线上的点的集合. 此直线称为点列的**底**, 点列中的点称为点列的 **元素**.

以直线 $l$ 为底的点列常记作 $l(A, B, C, \cdots)$ 或 $l(P)$.

(1)′　**线束**. 平面上过同一点的直线的集合. 此点称为线束的 **束心**, 线束中的直线称为线束的 **元素**.

以点 $L$ 为束心的线束常记作 $L(a, b, c, \cdots)$ 或 $L(p)$.

由前述, 每一条拓广直线上都有同样多的点, 都等于平面上过一通常点的直线数. 此外, 不难想像拓广平面上过一个通常点的直线数与过一个无穷远点的直线数也相同. 因此，上述一维基本形作为集合其基数是相同的.

注意，点列的着眼点为同一直线上的点，而不是直线本身. 因而，点列 (共线点的集合) 与直线 (点的轨迹) 是截然不同的两个概念，点列是作为几何元素的点的集合，而直线仅仅是一个几何元素. 同样，线束也是作为几何元素的共面直线的集合，条件是这些直线经过同一个点.

(2)　**点场**. 同一平面上所有点的集合, 这平面称为点场的 **底**, 其上的点称为点场的 **元素**.

(2)′　**线场**. 同一平面上所有直线的集合. 这平面称为线场的 **底**, 其上直线称为线场的 **元素**.

我们常以平面的记号来记点场或线场，如点场 $\pi$ 或线场 $\pi$ 等等.

这四个射影基本形中，前一对为 **一维基本形**, 后一对为 **二维基本形**. 今后将会常常用到.

在平面射影几何中, 点和直线是两类基本几何元素，故我们分别关于点和直线定义了射影基本形. 容易看出，在中心射影之下，这些射影基本形的像都还是同类射影基本形.

下面给出平面射影几何中最常使用的一对基本图形.

(3)　**三点形**. 不共线三点及其两两连线所构成的图形. 这三个点称为三点形的顶点, 其两两连线称为三点形的边.

常以其顶点来记三点形, 如三点形 $ABC$ 等等.

(3)′　**三线形**. 平面内不共点三直线及其两两相交的交点所构成的图形. 这三直线称为三线形的边, 其交点称为顶点.

常以其边来记三线形，如三线形 $abc$ 等等.

注意，上述图形与初等几何里的三角形是不同的概念.

### 习　题　1.1

1. 设 $\varphi$ 为平面 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 的中心射影，直线 $f$ 为平面 $\pi$ 上的影消线.　$\pi$ 上两直线 $p, q$ 与 $f$ 共点于 $V$, $p, q$ 在 $\pi'$ 上的像分别为 $p', q'$. 求证:　$p' /\!/ q'$.

2. 求一个中心射影，将平面 $\pi$ 上的任一四边形投射为平面 $\pi'$ 上的一个平行四边形.

3. 设 $\varphi$ 为平面 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 的中心射影，直线 $f$ 为平面 $\pi$ 上的影消线， $P, Q$ 为直线 $f$ 上的两个定点， $R$ 为平面 $\pi$ 内不在 $f$ 上的任一点. 求证： $\angle PRQ$ 在 $\pi'$ 上的像为定值.

4. 如果将平面 $\pi$ 上的一条定直线 $p$ 以 $O$ 为投射中心投射到平面 $\pi'$ 上得直线 $p'$. 求证：当 $O$ 变动时，直线 $p'$ 经过一个定点.

5. 问下列图形经过中心射影之后的对应图形分别是什么？

(1) 等腰三角形； (2) 直角三角形；

(3) 梯形； (4) 四边形；

(5) 圆； (6) 二次曲线；

(7) 正六边形； (8) 两条平行直线；

(9) 两条垂直直线； (10) 点列或线束.

6. 第 5 题中哪些图形在中心射影下是不变的 (指变为同名图形) ？

## §1.2 拓广平面上的齐次坐标

显然，由于理想元素的引入，拓广直线与拓广平面上的点已不能用通常的笛氏坐标来刻画. 为此，本节引入一种全新的坐标 —— 齐次坐标. 引入的宗旨是从笛氏坐标出发，使得通常点和无穷远点都可以用齐次坐标来刻画，但是对于通常点，齐次坐标与笛氏坐标又不发生矛盾. 我们把将要引入的这种齐次坐标称为笛氏齐次坐标.

### 一、 $n$维实向量类

设 $R$ 表示实数集. 记 $R^n$ 表示全体 $n$ 维实向量的集合，即

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in R\},$$

并记 $0 \in R^n$ 为 $n$ 维零向量. 在 $R^n \setminus \{0\}$ 中的向量之间建立一种关系 $\sim$: 设 $x, y \in R^n \setminus \{0\}$. 则 $x$ 与 $y$ 之间具有关系 $\sim$ 当且仅当存在 $\rho \in R(\rho \neq 0)$ 使得 $x = \rho y$. 容易看出 $\sim$ 为 $R^n \setminus \{0\}$ 上的一个等价关系. 令

$$RP^{n-1} = (R^n \setminus \{0\}) / \sim \quad (n \geqslant 2).$$

则 $RP^{n-1}$ 是全体 $n$ 维非零实向量类的集合. 为方便计，我们常取向量类中的任一个向量来记这个类. 比如， $x \in RP^{n-1}$ 既表示 $RP^{n-1}$ 中的一个类即 $R^n$ 中所有与 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 成比例的向量，也表示该类的一个代表元即一个特定的 $n$ 维实向量 $x$. 我们对将 $x$ 写成行向量和列向量不作区分，视应用场合需要，可以将一个向量写为行向量，也可以写为列向量.

$RP^{n-1}$ 中的向量习惯上都用圆括号表示，如果我们将其中所有向量都改为方括号表示，即 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 我们将这样表示的 $n$ 维实向量类记作

$$(RP^{n-1})^*=(R^n\setminus\{0\})/\sim \quad (n\geqslant 2),$$

这里 $R^n$ 中的向量都以方括号记. 尽管从代数上说， $RP^{n-1}$ 与 $(RP^{n-1})^*$ 实际上是完全相同的集合，但是它们将被赋以不同的几何意义.

**二、齐次点坐标**

1. 一维齐次点坐标 (拓广直线上点的齐次坐标)

**定义 1.4** 对于拓广直线上的通常点 $P$, 设其笛氏坐标为 $x$, 则定义满足 $x_1/x_2=x$(其中 $x_2\neq 0$) 的有序数组 $(x_1,x_2)$ 为点 $P$ 的 **齐次坐标**; 对于无穷远点 $P_\infty$, 定义 $(x_1,0)(x_1\neq 0)$ 为其齐次坐标.

我们将原欧氏直线上的点的笛氏坐标称为 **非齐次坐标**.

根据定义 1.4, 拓广直线上的任一点，都有无穷多组齐次坐标，即若 $(x_1,x_2)$ 是点 $P$ 的齐次坐标，则对任意的 $\rho\neq 0$, $(\rho x_1,\rho x_2)$ 也是点 $P$ 的齐次坐标. 于是，原点有一组齐次坐标为 $(0,1)$, 无穷远点有一组齐次坐标为 $(1,0)$. 定义 1.4 也刻画了通常点的齐次与非齐次坐标之间的关系.

容易看出，定义 1.4 实际上定义了拓广直线上的点的集合与 $RP^1$ 之间的一个双射 $\varphi$, 我们称 $\varphi$ 为拓广直线上的齐次点坐标映射.

2. 二维齐次点坐标 (拓广平面上点的齐次坐标)

容易看出，拓广平面上任一点 $P$ 都可视为两条直线 $l_1,l_2$ 的交点 (这里， $l_1,l_2$ 均为有穷远直线), 若 $P$ 为有穷远点，则 $l_1\nparallel l_2$; 若为无穷远点 $P_\infty$, 则 $l_1/\!/l_2$. 我们借助于这种方法来描述平面上的点，进而引入二维齐次点坐标. 设

$$l_i:\ \ A_ix+B_iy+C_i=0, \qquad i=1,2.$$

情形一. 若 $l_1\nparallel l_2$, 则交点 $P$ 为有穷远点，设 $P$ 的笛氏坐标为 $P(x,y)$, 则

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}. \qquad 其中 \begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0\ (因为\ l_1\nparallel l_2).$$

令

$$x_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\qquad x_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\qquad x_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},$$

则有 $x=x_1/x_3, y=x_2/x_3$, 即 $x:y:1=x_1:x_2:x_3$. 从而，我们可以把任何与 $(x,y,1)$ 成比例的有序三数组 $(x_1,x_2,x_3)$ 定义为点 $P$ 的齐次坐标.

情形二. 若 $l_1 // l_2$, 则其交点为无穷远点 $P_\infty$, 且此时 $P_\infty$ 为 $l_1, l_2$ 方向上的无穷远点. 显然 $x_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$. 故可考虑用与 $(x_1,x_2,0)$ 成比例的有序三数组来定义此 $P_\infty$ 的齐次坐标. 显然由 $l_1\neq l_2$ 可知 $x_1,x_2$ 不全为零. 为说明此定义的合理性，假定 $x_1\neq 0$, 我们来考察 $x_2/x_1$ 的几何意义. 因为

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\text{常数}, \qquad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\text{常数}.$$

又 $A_1A_2\neq 0(l_i \nparallel x$ 轴$)$ 或 $B_1B_2\neq 0(l_i \nparallel y$ 轴$)$, 不妨假设 $B_1B_2\neq 0$, 则

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{\dfrac{A_2C_1}{B_1B_2}-\dfrac{A_1C_2}{B_1B_2}}{\dfrac{B_1C_2}{B_1B_2}-\dfrac{B_2C_1}{B_1B_2}}=-\frac{\dfrac{A_2}{B_2}\left(\dfrac{C_1}{B_1}-\dfrac{C_2}{B_2}\right)}{\dfrac{C_1}{B_1}-\dfrac{C_2}{B_2}}=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{A_1}{B_1}.$$

于是， $x_2/x_1$ 为 $l_i$ 的斜率. 从而， $(x_1,x_2,0)$ 表示方向为 $\lambda=x_2/x_1$ 上的无穷远点. $(x_1,x_2,0)$ 亦可表为 $(1,\lambda,0)$. 显然，当 $\lambda=0$(即 $x_2=0$) 时，表示 $x$ 轴上的无穷远点. 而对于 $y$ 轴上的无穷远点，可定义其坐标为 $(0,x_2,0)$, $(x_2\neq 0)$.

从上述讨论我们可以自然地引入二维齐次点坐标的定义.

**定义 1.5** 对于拓广平面上的通常点 $P$, 若其笛氏直角坐标为 $(x,y)$, 则定义有序三数组 $(x_1,x_2,x_3)$ 为其 **齐次坐标**, 其中 $x_3\neq 0$ 且 $x_1/x_3=x, x_2/x_3=y$. 对于不在 $y$ 轴上的无穷远点，定义其齐次坐标为 $(x_1,x_2,0)$, 其中 $x_1\neq 0$ 且 $x_2/x_1$ 等于该点所在通常直线的斜率. 定义 $y$ 轴上的无穷远点的齐次坐标为 $(0,x_2,0)$, 其中 $x_2\neq 0$.

我们将平面上的通常点的原笛氏坐标称为 **非齐次坐标**.

由定义 1.5, 拓广平面上任一点都有无穷多组齐次坐标，这无穷多组齐次坐标之间相互成比例，即若 $(x_1,x_2,x_3)$ 是点 $P$ 的一个齐次坐标，则对任意的 $\rho\neq 0$, $(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$ 也是点 $P$ 的齐次坐标，因此在书写点 $P$ 的齐次坐标时，可以写 $P(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)(\rho\neq 0)$, 也可以直接写 $P(x_1,x_2,x_3)$. 由定义又知 $(0,0,0)$ 不是任何点的齐次坐标.

基于上述理解, 原点的齐次坐标可以写为 $(0,0,1)$, $x$ 轴上的无穷远点和 $y$ 轴上的无穷远点则分别可以写为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$.

对于通常点，定义 1.5 也刻画了其齐次与非齐次坐标之间的关系；对于无穷远点，定义 1.5 还刻画了其前两个坐标分量与其所在通常直线的斜率之间的关系.

容易看出，定义 1.5 实际上定义了拓广平面上点的集合与 $RP^2$ 之间的一个双

射 $\varphi$, 我们称 $\varphi$ 为拓广平面上的齐次点坐标映射．为方便计，常记 $x, y, a, b, \cdots$ 分别表示点 $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3)$, $(a_1, a_2, a_3)$, $(b_1, b_2, b_3)$, $\cdots$.

**例 1.1** (1) 试求下列各点的齐次坐标.

$P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$, $P_4\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$.

(2) 求直线 $3x - 4y + 1 = 0$ 上的无穷远点.

**解** (1) 根据定义，易求出：

$P_1(0,0,x_3)$, 其中 $x_3 \neq 0$, 特别地， $P_1(0,0,1)$.

$P_2(\rho,0,\rho)$, 其中 $\rho \neq 0$, 特别地， $P_2(1,0,1)$.

$P_3(0,\rho,\rho)$, 其中 $\rho \neq 0$, 特别地， $P_3(0,1,1)$.

$P_4\left(2\rho, \dfrac{5}{3}\rho, \rho\right)$, 其中 $\rho \neq 0$, 特别地， $P_4(6,5,3)$.

(2) 因为已知直线的方向 (斜率) 为 $\lambda = 3/4$, 所以所求直线上的无穷远点的齐次坐标为 $\left(1, \dfrac{3}{4}, 0\right)$, 或 $(4,3,0)$.

### 三、直线的齐次坐标方程

我们讨论在点的齐次坐标下直线的方程.

**定理 1.2** 在齐次点坐标下，直线的方程为

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0. \tag{1.1}$$

反之， (1.1) 式表示直线．称 (1.1) 为直线的 **齐次方程**.

**证明** 对于通常直线 $l$, 其在笛氏直角坐标系下的非齐次方程为

$$l:\ Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0), \tag{1}$$

将 $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$ 代入，得

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0, \tag{2}$$

即

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{3}$$

从而 (3) 即为 (1) 添加无穷远点 $(B, -A, 0)$ 之后的拓广直线，显然其形式为 (1.1).

对于无穷远直线 $l_\infty$, 其上点的特征为 $x_3 = 0$, 即为 (1.1) 中 $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$ 的情况.

反之，设 (1.1) 为任一齐次方程，若 $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$, 则它表示由欧氏直线 $u_1x + u_2y + u_3 = 0$ 添加无穷远点 $(u_2, -u_1, 0)$ 而得．若 $u_1 = u_2 = 0$, 则必有 $u_3 \neq 0$, 即 $x_3 = 0$, 这表示无穷远直线.

**推论 1.1**　过原点的直线有齐次方程

$$u_1x_1 + u_2x_2 = 0.$$

由上述定理，我们可以对有穷远直线的方程进行齐次与非齐次的互化.

**四、齐次线坐标**

到目前为止，我们所研究的几何学，都是以点为基本元素，而把图形视为点的集合，一般称此为 **点几何学** 观点. 如果把直线看作基本的几何元素，把几何图形视为直线的集合 (直线族的包络), 这就可以得到一种新的几何学观点，即 **线几何学**. 从而，对于一个图形，既可以用点几何的观点将其视为点的集合，也可以用线几何的观点将其视为直线的集合. 为此，我们引入线坐标概念.

在齐次点坐标下，直线的方程是

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

而且，对于任意的 $\rho \neq 0$,

$$\rho u_1x_1 + \rho u_2x_2 + \rho u_3x_3 = 0$$

仍表示同一条直线. 因此，直线被其方程的系数组完全确定，而相差一个非零比例常数的两个系数组表示同一直线. 由此可以引出齐次线坐标概念.

1. 直线的齐次坐标

**定义 1.6**　设直线 $l$ 的齐次方程为 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. 称方程中的系数组为直线 $l$ 的 **齐次线坐标**, 记作 $[u_1, u_2, u_3]$.

由定义 1.6 可以得到下述事实：

(1)　任一直线均有齐次坐标为不全为零的有序三数组 $[u_1, u_2, u_3]$；反之，任给不全为零的一个有序三数组 $[u_1, u_2, u_3]$, 在拓广平面上确定惟一直线 $\sum_{i=1}^{3} u_ix_i = 0$. 对任意的 $\rho \neq 0$, $[\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3] \equiv [u_1, u_2, u_3]$, 且 $[0, 0, 0]$ 不是任何直线的齐次坐标.

(2)　无穷远直线的方程为 $u_3x_3 = 0 (u_3 \neq 0)$ 或 $x_3 = 0$, 其齐次坐标为 $[0, 0, u_3]$ 或 $[0, 0, 1]$;

过原点的直线方程为 $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, 齐次坐标为 $[u_1, u_2, 0] (u_1, u_2$ 不全为零);

$y$ 轴的方程：　$x_1 = 0$, 坐标：　$[1, 0, 0]$;

$x$ 轴的方程：　$x_2 = 0$, 坐标：　$[0, 1, 0]$.

从上可见，齐次线坐标与齐次点坐标在代数上是完全相同的对象，为了区别其几何意义，我们分别采用方括号和圆括号来表示.

同样地，我们定义直线的齐次坐标，实际上是定义了拓广平面上所有直线的集合与 $(RP^2)^*$ 之间的一个双射 $\psi$, 称 $\psi$ 为拓广平面上的齐次线坐标映射.

综上，从欧氏平面上的笛氏直角坐标系出发，我们诱导了拓广平面上的点与直线的一种齐次坐标，称之为 **笛氏齐次坐标**. 由齐次线坐标的定义可以看出，线坐标映射 $\psi$ 可以由点坐标映射 $\varphi$ 完全确定.

为叙述方便，记 $u$,$v$,$\cdots$ 依次表示直线 $[u_1, u_2, u_3]$, $[v_1, v_2, v_3]$, $\cdots$.

2. 点的齐次方程

**定理 1.3** 在齐次坐标下，点 $x$ 在直线 $u$ 上 $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0. \tag{1.2}$$

**定义 1.7** 在齐次线坐标下，如果一个由齐次线坐标 $[u_1, u_2, u_3]$ 所构成的方程能且仅能被过平面上一个确定的点 $P$ 的直线的坐标所满足，则称此方程为 **点 $P$ 的齐次方程**.

**定理 1.4** 在齐次线坐标下，一点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 的齐次方程是

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0. \tag{1.3}$$

反之，由流动线坐标 $[u_1, u_2, u_3]$ 所构成的一次齐次方程必定表示一点.

**证明** 据定理 1.3, 在齐次坐标下，直线 $u = [u_1, u_2, u_3]$ 过点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 的充要条件是 $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$. 从而据定义 1.7, (1.3) 是点 $a$ 的方程.

反之, 对于由流动线坐标构成的一次齐次方程 (1.3), 其中的系数 $a_1, a_2, a_3$ 不全为零，构成一个点的齐次坐标，此点在满足方程 (1.3) 的任一直线上，故方程 (1.3) 表示点 $a = (a_1, a_2, a_3)$.

由定理 1.3 和定理 1.4 可知，在齐次线坐标下，一个点 $x$ 的方程为

$$\sum_{i=1}^{3} x_i u_i = 0. \tag{1.4}$$

这里，由于 $x$ 是固定的点，故 $x_i$ 是常数，而 $u_i$ 是流动坐标.

从代数上看，点与直线的齐次方程都是一个一次齐次式. 这个齐次式表示点还是直线取决于我们将其中的 $u_i$ 还是 $x_i$ 看作流动坐标. 因此，我们称笼统写出的 (1.2) 式为点与直线的关联关系或结合关系.

如同由坐标写出直线的方程一样，若已知一点的坐标为 $a = (a_1, a_2, a_3)$, 要写出它的齐次方程，只要在 (1.3) 式中，以 $a_i$ 为系数，以 $u_i$ 为流动坐标即可.

**例 1.2** 求下列各点的齐次方程：

(1) 点 $(3, 1, 5)$;　　(2) 原点；

(3) $x$ 轴上的无穷远点；　　(4) 直线 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ 上的无穷远点.

**解**：　(1) $3u_1 + u_2 + 5u_3 = 0$;

(2) 因为原点的齐次坐标为 $(0,0,1)$, 所以，原点的齐次方程为 $u_3=0$;

(3) 因为 $x$ 轴上的无穷远点的齐次坐标为 $(1,0,0)$, 故齐次方程为 $u_1=0$;

(4) 方法一. 因为所给直线的方向 (斜率) 为 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, 所以，这直线上的无穷远点的齐次坐标为 $(1,\lambda,0)$, 即 $(2,-1,0)$, 从而其齐次方程为 $2u_1-u_2=0$.

方法二. 在原方程中令 $x_3=0$, 求出 $x_1:x_2$, 即得直线 $x_1+2x_2+x_3=0$ 上的无穷远点的齐次坐标为 $(2,-1,0)$, 亦可得齐次方程如上.

易见，无穷远直线上的点的齐次方程的代数形式与过原点的直线的齐次方程完全一致.

### 五、非齐次线坐标

**定义 1.8** 对于直线 $u=[u_1,u_2,u_3]$, 若 $u_3\neq 0$, 则定义其非齐次线坐标为 $[U,V]$, 其中

$$U=\frac{u_1}{u_3},\qquad V=\frac{u_2}{u_3}.$$

由定义 1.8 可知，形如 $[u_1,u_2,0]$ 的直线没有非齐次坐标，这些正是过原点的直线.

在非齐次坐标下，点与直线的关联关系为

$$Ux+Vy+1=0. \tag{1.5}$$

显然，过原点的直线及在无穷远直线上的点均不满足这一关联关系. 所以，使用非齐次坐标讨论几何性质时，点与直线的关联关系不再具有通用性，即使对无穷远直线避而不谈，对于过原点的直线也需要单独讨论，这不利于进行理论分析.

在非齐次坐标下，若点 $(x_0,y_0)$ 非原点，则其方程为 $x_0U+y_0V+1=0$; 若直线 $[U_0,V_0]$ 非无穷远直线，则其方程为 $U_0x+V_0y+1=0$. 严格地说，在非齐次坐标下，原点和无穷远直线均没有方程.

由于上述原因，我们一般不采用非齐次线坐标研究问题.

在点坐标下，曲线被看作是点的轨迹，称为点曲线，利用 “描点作图” 的方法可以画出这一曲线的草图；而在线坐标下，曲线被视为直线族的包络，称为线曲线，在线坐标下，按某种条件求出的曲线方程，实际上是满足该条件的直线族 (即包络) 的方程，要画这曲线的草图，可以作出该直线族中的若干条直线，然后描出其包络 (即与族中每一直线都相切的曲线).

### 六、关于齐次坐标的基本结论

据齐次点坐标与齐次线坐标的定义，显然有下列结论成立.

**定理 1.5** 两点 $a,b$ 重合 $\Longleftrightarrow$

$$\text{秩}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=1.$$

**定理 1.5′** 两直线 $a,b$ 重合 $\Longleftrightarrow$

$$\text{秩}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=1.$$

**证明** 我们证定理 1.5. 显然，两点 $a,b$ 重合 $\Longleftrightarrow a,b$ 是 $RP^2$ 中同一个元素的代表元素 $\Longleftrightarrow$ 上述矩阵的秩小于 2, 又因为 $a,b\in(R^3\setminus\{0\})$, 故上述矩阵的秩不小于 1, 从而秩为 1.

**定理 1.6** 相异两点 $a,b$ 连线方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

坐标为

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right].$$

**定理 1.6′** 相异两直线 $a,b$ 交点方程为

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

**证明** 我们来证定理 1.6. $a,b$ 连线方程为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \\ u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3=0 \\ u_1b_1+u_2b_2+u_3b_3=0 \end{cases} \text{对 } u_1,u_2,u_3 \text{ 有非零解} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

为求此二点连线的坐标，只要联立上述方程组的后两个方程求解，由线性代数知识立刻可得结论.

**定理 1.7** 相异三点 $a,b,c$ 共线 $\Longleftrightarrow$

$$\text{秩}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=2.$$

**定理 1.7′** 相异三直线 $a,b,c$ 共点 $\Longleftrightarrow$

$$\text{秩}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}=2.$$

**证明** 据定理 1.6, 秩小于 3 为显然. 又因为此三点相异，故必有秩等于 2.

**定理 1.8** 以相异二点 $a, b$ 连线为底的点列中点的齐次坐标能而且仅能表示为 $la + mb(l^2 + m^2 \neq 0)$.

**定理** $1.8'$ 以相异二直线 $a, b$ 交点为束心的线束中直线的齐次坐标能而且仅能表示为 $la + mb(l^2 + m^2 \neq 0)$.

**证明** 我们证定理 1.8. 显然，坐标为 $c = la + mb$ 的点满足

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

故点 $c$ 在以 $a, b$ 连线为底的点列中.

反之，设 $c$ 为以 $a, b$ 连线为底的点列中任意一点．则

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

即上述三个行向量线性相关，而 $a, b$ 相异，故向量 $a, b$ 线性无关，必有 $c = la + mb$，且 $l^2 + m^2 \neq 0$.

由定理 1.8, 我们将 $c = la + mb$ 称为点列的以相异二点 $a, b$ 为 **基点** 的 **齐次参数表示**. 若记 $\lambda = \dfrac{m}{l}$, 则得到 **非齐次参数表示** $c = a + \lambda b$. 但此时必须规定，当 $l = 0$ 时， $\lambda = \infty$, 而且规定运算 $\dfrac{x}{0} = \infty(x \in R, x \neq 0)$, $\dfrac{x}{\infty} = 0(x \in R,\ x \neq 0)$, 而 $\dfrac{\infty}{\infty} = 1$. 记 $\overline{R} = R \cup \{\infty\}$ 并称 $\overline{R}$ 为 **拓广的实数集**, 则由 $c = a + \lambda b$ 得到点列中点的集合到 $\overline{R}$ 的一个双射．在这个双射下， $\lambda = 0$ 时， $c = a$; $\lambda = 1$ 时， $c = a + b$; $\lambda = \infty$ 时， $c = b$. 从而可以将点列的非齐次参数表示作为点列中点的一种非齐次坐标.

由定理 $1.8'$ 同样可得线束的齐次参数表示和非齐次参数表示．点列与线束的参数表示是射影几何中的一种非常重要的工具.

**定理 1.9** 相异三点 $a, b, c$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 存在数 $p, q, r(pqr \neq 0)$, 使得

$$pa + qb + rc = 0.$$

**定理 $1.9'$** 相异三直线 $a, b, c$ 共点 $\Longleftrightarrow$ 存在数 $p, q, r(pqr \neq 0)$, 使得

$$pa + qb + rc = 0.$$

上述关于点和直线的五对结论在用代数法研究射影几何中具有基本的重要性. 由于齐次坐标的特性，关于点与直线的每一对结论在代数形式上都完全对等，因此可以推知，在实际应用时关于点和直线的某些命题的论证可能会具有完全相同的代数形式.

**例 1.3** 已知三点 $a=(3,1,1)$, $b=(7,5,1)$, $c=(6,4,1)$.

(1) 验证此三点共线;

(2) 求 $l,m$, 将 $c$ 写为 $la+mb$ 的形式; 进而求 $\lambda$, 写出 $c=a+\lambda b$.

**解** (1) 请读者自己完成.

(2) 方法一: 设 $c=la+mb$. 即

$$l\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix},$$

解之得 $l=\dfrac{1}{4},m=\dfrac{3}{4}$, 即有

$$c=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b.$$

进而, 适当选取 $a,b,c$ 的齐次坐标, 可以有 $c=a+3b$, 即 $\lambda=3$.

方法二: 令

$$\rho\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}.$$

消去 $\rho$, 可得 $\lambda=3$. 于是可以重新选取 $a,b,c$ 的齐次坐标, 使得 $c=a+3b$.

**例 1.4** (1) 设 $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3)$ 为平面上不共线三点. 求证: 平面上任一点的齐次坐标可以表示为

$$la_i+mb_i+nc_i \qquad (i=1,2,3),$$

其中 $l,m,n$ 为不全为零的常数.

(2) 又设 $d=(d_1,d_2,d_3)$ 为平面上一点, 且 $a,b,c,d$ 四点中无三点共线. 求证: 存在全不为零的常数 $p,q,r,s$, 使得

$$pa_i+qb_i+rc_i+sd_i=0 \qquad (i=1,2,3).$$

由此推出, 可以适当选取这四点的齐次坐标 $(a_1',a_2',a_3')$, $(b_1',b_2',b_3')$, $(c_1',c_2',c_3')$, $(d_1',$ $d_2',d_3')$, 使得

$$a_i'+b_i'+c_i'+d_i'=0 \qquad (i=1,2,3).$$

**证明** (1) 设 $d$ 为平面上任一点. 则依 $d$ 与点 $a,b,c$ 的关系, 可有如下三种情形.

情形 1. $d$ 为 $a,b,c$ 三者之一. 则表达式显然成立, 而且 $l,m,n$ 中将有两个为零;

情形 2. $d$ 位于 $a,b,c$ 三点中某两点的连线上. 则 $d$ 是以此二点连线为底的点列中的点, 表达式中 $l,m,n$ 将有一个为零.

情形 3. $d$ 不属于上述情形之一, 即 $a,b,c,d$ 四点中任何三点不共线. 设 $t$ 为 $a,d$ 连线与 $b,c$ 连线的交点. 则据定理 1.8 有

$$d_i = la_i + ft_i \quad (i=1,2,3).$$

因为 $d \neq a,t$, 所以 $lf \neq 0$. 同理可得

$$t_i = gb_i + hc_i \quad (i=1,2,3),$$

其中 $gh \neq 0$.

综合上述二式可得

$$d_i = la_i + mb_i + nc_i \quad (i=1,2,3).$$

(2) 由 (1) 显然有

$$pa_i + qb_i + rc_i + sd_i = 0,$$

但是因为 $a,b,c,d$ 四点中无三点共线, 故有 $pqrs \neq 0$. 重新取 $a_i' = pa_i$, $b_i' = qb_i$, $c_i' = rc_i$, $d_i' = sd_i$, 则得到此四点有一组特定的齐次坐标使得

$$a_i' + b_i' + c_i' + d_i' = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

成立.

例 1.4 说明, 若给定平面上不共线三点则可以表示平面上任一点的齐次坐标, 那么这是否可以成为拓广平面上的一种齐次坐标系呢？问题是由于每个点都有无穷多组成比例的齐次坐标, 因此这种表示不一定是惟一的. 我们来探讨如何使得这种表示成为惟一表示. 设 $A_1, A_2, A_3$ 依次为笛氏坐标系中 $x,y$ 轴上的无穷远点和坐标原点. 则它们依次有一组齐次坐标为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, 显然, 拓广平面上任一点 $x$ 可表为

$$x = (x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1).$$

为了使 $A_1, A_2$ 或 $A_3$ 取其另外的齐次坐标时, 上式仍然表示同一个点 $x$, 我们在平面上取定一个特殊的点 $I$, 令

$$I = (1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1).$$

显然，$A_1, A_2, A_3, I$ 中任意三点不共线，称 $(A_1A_2A_3|I)$ 为拓广平面上 **笛氏齐次坐标系**, 三点形 $A_1A_2A_3$ 称为 **坐标三点形**, $I$ 称为 **单位点**. 容易看出，单位点 $I$ 的作用是限定坐标三点形顶点坐标的选取.

**例 1.5** 设 $A_1A_2A_3$ 为笛氏齐次坐标系的坐标三点形. 设在此坐标系下有点 $P_1(p,g,h)$, $P_2(f,q,h)$, $P_3(f,g,r)$.

(1) 求证：$P_2P_3$ 与 $A_2A_3$ 的交点，$P_3P_1$ 与 $A_3A_1$ 的交点，$P_1P_2$ 与 $A_1A_2$ 的交点三点共线，并求出此直线的方程;

(2) 若 $fgh = pqr$, 求证：$A_1P_2, A_2P_3, A_3P_1$ 共点，$A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2$ 也共点.

**证明** 显然，$A_1, A_2, A_3$ 的齐次坐标分别为 $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$.

(1) 据定理 1.6, $P_2P_3$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f & q & h \\ f & g & r \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$(qr - gh)x_1 + (fh - fr)x_2 + (fg - fq)x_3 = 0.$$

又 $A_2A_3$ 的方程为

$$x_1 = 0.$$

据定理 1.6′, 可得 $P_2P_3$ 与 $A_2A_3$ 的交点坐标为 $(0, g-q, r-h)$.

同理可得，$P_3P_1$ 与 $A_3A_1$ 的交点坐标为 $(p-f, 0, h-r)$. $P_1P_2$ 与 $A_1A_2$ 的交点坐标为 $(f-p, q-g, 0)$.

不难验证

$$\begin{vmatrix} 0 & g-q & r-h \\ p-f & 0 & h-r \\ f-p & q-g & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

故据定理 1.7, 所论三点共线，其所在直线方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p-f & 0 & h-r \\ f-p & q-g & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\frac{x_1}{p-f} + \frac{x_2}{q-g} + \frac{x_3}{r-h} = 0.$$

(2) 容易求出，$A_1P_2$ 的方程为 $hx_2-qx_3=0$; $A_2P_3$ 的方程为 $fx_3-rx_1=0$; $A_3P_1$ 的方程为 $gx_1-px_2=0$. 而此三直线共点 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & h & -q \\ -r & 0 & f \\ g & -p & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即 $fgh=pqr$.

同理可证 $A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2$ 共点的充要条件也是 $fgh=pqr$.

**例 1.6** 设三点形 $ABC$ 的三边 $BC, CA, AB$ 的方程分别为 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$, 又有分别过 $A, B, C$ 的三直线. 求证: 此三直线共点 $\Longleftrightarrow$ 其方程可以表为 $q\beta-r\gamma=0$, $r\gamma-p\alpha=0$, $p\alpha-q\beta=0$, 其中 $p, q, r$ 为常数.

**证明** “ $\Longleftarrow$ ” 显然.

“ $\Longrightarrow$ ” 不妨设三直线不与已知三点形的任一边重合. 显然过 $A$ 的直线方程可表为 $q\beta-r\gamma=0$. 对于过 $B$ 的直线, 可以适当选取 $p$, 使其方程表为 $r\gamma-p\alpha=0$. 对于过 $C$ 的直线，可以适当选取 $q'$, 使其方程表为 $p\alpha-q'\beta=0$. 因为此三直线共点而且不重合于边，所以存在 $l, m, n(lmn\neq 0)$ 使得

$$l(q\beta-r\gamma)+m(r\gamma-p\alpha)+n(p\alpha-q'\gamma)=0,$$

即

$$(np-mp)\alpha+(lq-nq')\beta+(nr-lr)\gamma=0.$$

注意到 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 不共点，立即可得 $q=q'$.

## 习　题　1.2

1. 求下列各点的齐次坐标，先写出所有组再任选一组.

(1) $(2,0)$, $(1,3)$, $(4,1)$, $\left(\dfrac{5}{3},2\right)$;

(2) 以 $\dfrac{3}{4}$ 为方向的无穷远点;

(3) 直线 $3x+y=0$ 上的无穷远点.

2. 如果存在，求下列各点的非齐次坐标.

$P(2,4,-1)$, $Q(\sqrt{10},-\sqrt{6},2)$, $R(0,1,0)$, $S(0,4,3)$, $T(1,4,0)$, $U(1,0,4)$.

3. 如果正负号可以任意选取，问 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 可以表示几个相异的点？写出它们并求出其相应的非齐次坐标.

4. 求下列各直线的齐次坐标.

(1) $x$ 轴;　(2) $y$ 轴;

(3) 无穷远直线;　(4) $x_1-2x_2-3x_3=0$;

(5) 通过原点，斜率为 2 的直线;　(6) 两点 $(0,1,0)$ 与 $(1,0,1)$ 的连线.

5. 如果存在，求第 4 题中各直线的非齐次线坐标.

6. 求下列各直线上的无穷远点.

(1) $x_1+x_2-4x_3=0$; (2) $x_1+2x_2=0$;

(3) $x_2-3x_3=0$; (4) $x_1+5x_3=0$.

7. 求下列各线坐标所表示的直线方程.

(1) $[0,1,1]$; (2) $[1,1,-1]$; (3) $[1,0,1]$;

(4) $[1,-1,0]$; (5) $[2,-1,5]$; (6) $[0,0,1]$.

8. 下列线坐标方程各表示什么图形？

(1) $u_1=0$; (2) $u_3=0$;

(3) $u_2-u_3=0$; (4) $2u_1+u_2=0$;

(5) $u_1+u_2+2u_3=0$; (6) $u_1^2-5u_1u_2+4u_2^2=0$;

(7) $u_1^2-3u_1u_2+2u_3^2=0$; (8) $au_1+bu_2=0$.

9. 求下列各点的齐次线坐标方程.

(1) $x$ 轴上的无穷远点;

(2) $y$ 轴上的无穷远点;

(3) 斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线上的无穷远点;

(4) $(0,0,1)$;

(5) $(2,4,-3)$.

10. 如果存在，求上题中各点的非齐次线坐标方程.

11. 试求以 $2x_1+x_2+x_3=0$, $3x_1-4x_2+2x_3=0$, $4x_1+x_2-3x_3=0$ 为边的三点形的顶点坐标.

12. 试求以 $A(1,2,3),B(2,2,1),C(3,4,3)$ 为顶点的三线形的三边方程.

13. 求下列两直线的交点坐标与方程.

(1) $x_1+2x_2-4x_3=0$ 与 $2x_1-x_2+x_3=0$;

(2) $x_1-2x_2=0$ 与 $4x_1-5x_2+x_3=0$.

14. 已知三点 $P_1(1,4,-3),P_2(0,2,5),P_3(3,8,-19)$.

(1) 证明： $P_1,P_2,P_3$ 三点共线;

(2) 求所在直线方程;

(3) 选取 $P_3$ 的齐次坐标使得 $P_3=P_1+\lambda P_2$.

15. 设三点形 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$ 在同一平面内， $B_1C_1$ 与 $B_2C_2$ 交于 $X$, $C_1A_1$ 与 $C_2A_2$ 交于 $Y$, $A_1B_1$ 与 $A_2B_2$ 交于 $Z$, 而且 $X,Y,Z$ 三点共线. 求证：三直线 $A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2$ 共点.

(提示：令三点形 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$ 的边 $B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$ 和 $B_2C_2$, $C_2A_2$, $A_2B_2$ 的齐次方程依次为 $\alpha_1=0,\beta_1=0,\gamma_1=0$; 和 $\alpha_2=0,\beta_2=0,\gamma_2=0$, 再令 $X,Y,Z$ 所在直线齐次方程为 $\delta=0$, 然后利用本节知识. )

16. 设 $O(f,g,h)$, $A_1A_2A_3$ 为坐标三点形， $A_1O,A_2O,A_3O$ 分别与 $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ 交于 $P,Q,R$; $QR,RP,PQ$ 分别与 $A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2$ 交于 $L,M,N$. 求证： $L,M,N$ 三点共线，并求出此直线的方程.

17. 设 $O$ 为定直线 $x_2-kx_3=0$ 上的动点， $A_1A_2A_3$ 为笛氏齐次坐标系的坐标三点形. $A_2O,A_3O$ 分别与 $A_1A_3,A_1A_2$ 交于 $Q,R$. 求证： $QR$ 与 $A_1A_3$ 交于定点 $X$. 并求出直线 $A_1X$ 的方程.

18. 设 $a,b,c$ 为不共线三点. 证明: 平面内相异三点 $l_ia+m_ib+n_ic\ (i=1,2,3,l^2+m^2+n^2\neq 0)$ 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0.$$

19. 求两直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 上的无穷远点的方程.

20. 求证：方程 $u_1^2+3u_1u_2-u_2^2=0$ 所决定的无穷远点在相互垂直的方向上.

21. 完成下表：

| | 坐 标 | | 方 程 | |
|---|---|---|---|---|
| | 齐 次 | 非齐次 | 齐 次 | 非齐次 |
| 原点 | | | | |
| 无穷远直线 | | | | |
| 过原点的直线 | | | | |
| $\lambda=a_2/a_1$ 方向上的无穷远点 | | | | |
| $y$ 轴 | | | | |
| 过 (0,1) 斜率为 2 的直线 | | | | |

22. 求两点 $3u_1+4u_2-11u_3=0$ 与 $5u_1-3u_2+u_3=0$ 连线的坐标与方程.

23. 求通过两直线 $[1,1,1],[2,1,3]$ 的交点与点 $2u_1+3u_2+u_3=0$ 的直线的坐标与方程, 并求其上无穷远点的坐标.

## §1.3 射 影 平 面

本节运用公理化方法定义二维实射影空间即实射影平面, 并给出其若干模型, 讨论二维射影坐标系及射影坐标变换，最后给出二维实 – 复射影平面概念.

### 一、实射影平面 (二维实射影空间)

在即将定义的射影平面上，我们约定点与直线为一对无定义的基本元素，在点的集合与直线的集合之间有一个关系称为关联关系. 对所谓的关联关系，给出如下约定.

**约定 1.2** (1) 当点 $P$ 与直线 $l$ 有关联关系时，下列说法等价：

| | |
|---|---|
| 点 $P$ 与直线 $l$ 相关联; | 直线 $l$ 与点 $P$ 相关联; |
| 点 $P$ 在直线 $l$ 上. | 直线 $l$ 通过点 $P$. |

(2) 点 $P$ 与直线 $l$ 没有关联关系时，下列说法等价：

| | |
|---|---|
| 点 $P$ 与直线 $l$ 不关联; | 直线 $l$ 与点 $P$ 不关联; |
| 点 $P$ 不在直线 $l$ 上. | 直线 $l$ 不通过点 $P$. |

**定义 1.9** 设集合 $\pi$ 为两个不交的非空集合 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{L}$ 的并集.

| | |
|---|---|
| $\mathcal{P}$ 的元素称为 $\pi$ 的 **点**. | $\mathcal{L}$ 的元素称为 $\pi$ 的 **直线**. |

而且，在点与直线之间有一个关系称为关联关系，满足下述公理

**公理 P** 存在一对双射

| | |
|---|---|
| $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow RP^2,$ | $\psi : \mathcal{L} \longrightarrow (RP^2)^*$ |

对于任意的 $P \in \mathcal{P}$ 和任意的 $l \in \mathcal{L}$, 若

| | |
|---|---|
| $\varphi(P) = x,$ | $\psi(l) = u$ |

则点 $P$ 与直线 $l$ 相关联 $\Longleftrightarrow u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$

称 $\pi$ 为以 $\mathcal{P}$ 为点集，$\mathcal{L}$ 为直线集的一个 **实射影平面** 或称为 **二维实射影空间**, 记作 $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$. 满足公理 P 的一对双射 $(\varphi, \psi)$ 称为实射影平面 $\pi$ 上的一个 **射影坐标映射**. 并分别称 $\varphi$ 与 $\psi$ 为 **点坐标映射** 和 **线坐标映射**, 点和直线的坐标映射像分别称为点和直线的 **坐标**.

对于点或直线，我们常常直接用其坐标来称呼它们，比如点 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 直线 $u = [u_1, u_2, u_3]$, 或者直接写点 $x$, 直线 $u$.

由公理 P, 显然有下述定理成立.

**定理 1.10** 在射影平面上，方程

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{1.6}$$

表示直线或点. 当把 $x_i$ 作为流动变量而 $u_i$ 作为常数时 (1.6) 表示直线 $[u_1, u_2, u_3]$; 反之表示点 $(x_1, x_2, x_3)$.

由定理 1.10 可以看出，公理 P 中的线坐标映射 $\psi$ 可以由点坐标映射 $\varphi$ 诱导.

### 二、实射影平面的模型 (实现)

我们已经用公理化的方法定义了实射影平面. 若 $\pi$ 是满足定义的一个对象，则 $\pi$ 是一个实射影平面，也称 $\pi$ 是实射影平面的一个 **实现**, 或称为一个 **模型**. 我们可以取实射影平面的任一个模型展开平面射影几何的研究.

**例 1.7** 拓广平面是实射影平面的一个模型.

其中 $\mathcal{P}=\{$全体拓广点$\}$, $\mathcal{L}=\{$全体拓广直线$\}$. 显然，公理 P 被满足. 进而，坐标映射 $(\varphi,\psi)$ 的选取已经有着相当大的任意性，通常点与无穷远点，通常直线与无穷远直线已经不再有区别，由笛氏坐标系诱导的笛氏齐次坐标是其上一个特定的射影坐标映射.

由于这个模型与我们熟知的几何空间最为贴近，今后对射影几何的综合法研究将直接在这个模型上展开.

**例 1.8** 实射影平面的算术模型 (算术实现): 算术实射影平面 $\pi_R=(RP^2,(RP^2)^*)$.

在这个射影平面中， $\mathcal{P}=RP^2, \mathcal{L}=(RP^2)^*$. 点 $x$ 与直线 $u$ 相关联当且仅当

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

在 $\pi_R$ 上有一个自然的射影坐标映射 $(\alpha,\beta)$, 其中

$$\alpha: RP^2\longrightarrow RP^2;\qquad \beta:(RP^2)^*\longrightarrow(RP^2)^*$$

均为恒同映射.

事实上，对于任一个实射影平面 $\pi=(\mathcal{P},\mathcal{L})$, 在 $\pi$ 上点 $P$ 与直线 $l$ 相关联当且仅当在其算术模型 $\pi_R$ 中点 $\varphi(P)$ 与直线 $\psi(l)$ 相关联. 因此，可以说实射影平面与其算术模型之间仅仅相差一个坐标映射. 由于算术模型与我们熟知的线性代数知识最为贴近，今后对射影几何的代数法研究将在直接这个模型上展开.

由于坐标映射的建立，通俗地说，拓广平面模型与算术模型在形数结合的意义下是统一的. 本教材将主要用代数法并兼用综合法研究射影几何，所以在具体研究中我们将不区分地使用拓广平面模型与算术模型，并且为叙述方便也称其为射影平面.

实射影平面还有其他许多模型 (见本节习题). 通过这些模型，我们可以对几何学的公理化方法和抽象性有初步的体会，只要满足给定的公理，在选取“具体的”几何元素和几何关系时可以具有相当广泛的“任意性”.

**例 1.9** 实射影平面的对偶平面也是实射影平面.

给定一个实射影平面 $\pi=(\mathcal{P},\mathcal{L})$, 我们总可以构造出另一个实射影平面 $\pi^*=(\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*)$, 其中 $\mathcal{P}^*=\mathcal{L},\mathcal{L}^*=\mathcal{P}$. 在 $\pi^*$ 中， $\pi^*$ 点 $l$ 与 $\pi^*$ 直线 $P$ 相关联当且仅当在 $\pi$ 中 $\pi$ 点 $P$ 与 $\pi$ 直线 $l$ 相关联. 而且若在 $\pi$ 上有射影坐标映射 $(\varphi,\psi)$, 则在 $\pi^*$ 上有射影坐标映射 $(\psi,\varphi)$. 我们称 $\pi^*=(\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*)$ 为 $\pi=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 的 **对偶平面**.

显然， $(\pi^*)^*=\pi$.

**例 1.10** 实射影平面的拓扑模型.

可以证明，叠合对径点的球面，叠合赤道上对径点的半球面，叠合周界上对径点的圆盘都是实射影平面的拓扑模型，利用它们与拓广平面之间的映射，容易构造出这些模型上的坐标映射.

事实上，在拓扑学中，射影平面是一个最基本的不可定向的闭曲面，其亏格为零.

### 三、射影坐标变换

由于拓广平面是实射影平面的一个模型， §1.2 中关于齐次坐标的所有性质都在实射影平面上成立. 特别，在其上有一个笛氏齐次坐标系 $(A_1A_2A_3|I)$, 通过它，首先得到点坐标映射，然后由点与直线的关联关系又得到线坐标映射，因此它是一个特定的射影坐标系. 现在我们给出射影坐标系的一般定义，并给出一般的坐标映射以及不同的坐标映射之间的坐标变换关系.

**定义 1.10** 在射影平面上取定四点 $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1), I(1,1,1)$, 并规定无论如何选取 $A_1, A_2, A_3, I$ 的齐次坐标，关系式

$$\rho I = A_1 + A_2 + A_3 \quad (0 \neq \rho \in R) \tag{1.7}$$

总成立. 则称此四点为射影平面上的一个 **原始的射影坐标系**, 记作 $(A_1A_2A_3|I)$. 称三点形 $A_1A_2A_3$ 为 **坐标三点形**, 点 $I$ 称为 **单位点**. 点与直线在此坐标系下的坐标称为原始坐标.

事实上，对于拓广平面模型，原始坐标系即为在欧氏平面上取定的一个笛氏齐次坐标系.

**定理 1.11** 在射影平面上任意取定四点 $P, Q, R, E$, 满足:

(1) $P, Q, R, E$ 中任何三点不共线;

(2) 无论如何选取这四点的原始坐标 $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $R(r_1, r_2, r_3)$, $E(e_1, e_2, e_3)$ 总成立

$$\rho(e_1, e_2, e_3) = (p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) + (r_1, r_2, r_3). \quad (0 \neq \rho \in R) \tag{1.8}$$

则此四点构成一个以 $PQR$ 为 **坐标三点形**, 以点 $E$ 为 **单位点** 的 **射影坐标系**, 记作 $(PQR|E)$.

**证明** 只要证明，对于射影平面上任一点 $X$, $(PQR|E)$ 可以惟一确定 $X$ 的点坐标映射. 设 $X$ 的原始坐标为 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. 利用线性代数知识，必有不全为零的数组 $x_1, x_2, x_3$, 使得

$$\rho(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = x_1(p_1, p_2, p_3) + x_2(q_1, q_2, q_3) + x_3(r_1, r_2, r_3), \quad 0 \neq \rho \in R\text{为常数},$$

即

$$\rho\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\\p_3&q_3&r_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.\qquad 0\neq\rho\in R\text{为常数}.\tag{1.9}$$

由于 $P,Q,R$ 三点不共线，(1.9) 中的矩阵满秩，故除去非零常数 $\rho$ 外 $(x_1,x_2,x_3)$ 是惟一确定的．又由于非零比例常数 $\rho$ 的存在，$(x_1,x_2,x_3)$ 是 $RP^2$ 中惟一向量类的代表．因而 $(PQR|E)$ 通过方程组 (1.9) 惟一确定了点 $X$ 的坐标映射．从而是一个射影坐标系．$(x_1,x_2,x_3)$ 称为点 $X$ 在 $(PQR|E)$ 下的一个 **齐次射影坐标**, 记作 $X(x_1,x_2,x_3)$.

由定理 1.11 可知，点 $P,Q,R,E$ 在射影坐标系 $(PQR|E)$ 下的齐次射影坐标可依次取为 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$．由此，原始的射影坐标系并不是固有的，其性质是所有射影坐标系所共有的．今后我们可以不必特别区分原始的射影坐标系.

(1.9) 式实际上揭示了射影平面上两个射影坐标系之间的关系，由于 $P,Q,R$ 不共线，它是一个非奇异线性变换．(1.9) 式的逆式存在，其逆式也是一个非奇异线性变换．因此，(1.9) 及其逆式是射影平面上两种射影坐标之间的 **射影坐标变换**.

从坐标变换的角度说，(1.9) 式表示了以一个点的新坐标表示其老坐标的变换公式，习惯上，我们总是以 $(x_i')$ 表示一个点在新坐标系下的坐标，而用 $(x_i)$ 表示该点的老坐标，所以，(1.9) 式按习惯又写为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\\p_3&q_3&r_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},\qquad 0\neq\rho\in R\text{为常数}.\tag{1.10}$$

注意，习惯上 (1.10) 式是 **坐标变换的逆式**. 这个逆式的获得基础是取新坐标三点形在原坐标系下的坐标分别为 $P(p_i),Q(q_i),R(r_i)$, 并且取新单位点为 $E(p_i+q_i+r_i)$. 今后，我们将会在这样的选取条件下直接使用 (1.10) 式.

### 四、实射影直线 (一维实射影空间)

我们已经给出了射影平面的定义与模型，读者仿照此不难给出射影直线的定义，也不难证明拓广直线和 $RP^1$ 都是射影直线的模型．而且，点列是一维实射影空间，而线束则是点列的对偶空间．同时，利用拓广直线上的笛氏齐次坐标，不难诱导出一维射影坐标系的定义．事实上，作为二维射影空间子空间的一维射影空间，在其上有一个由二维射影坐标系自然诱导的一维射影坐标系，即下面的定义.

**定义 1.11** 在射影直线上任意取定相异三点 $P,Q,E$, 选取其笛氏齐次坐标 $P(p_1,p_2,p_3)$, $Q(q_1,q_2,q_3)$, $E(e_1,e_2,e_3)$ 使得

$$\rho(e_1,e_2,e_3)=(p_1,p_2,p_3)+(q_1,q_2,q_3). \quad (0\neq\rho\in R) \tag{1.11}$$

则定义了射影直线上的一个 **一维射影坐标系**, 记作 $(PQ|E)$. 称 $P,Q$ 为 **基点**, $E$ 为 **单位点**.

对于射影直线上任一点 $X(x_1,x_2,x_3)$, 必有不全为零的数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\rho(x_1,x_2,x_3)=\lambda(p_1,p_2,p_3)+\mu(q_1,q_2,q_3), \quad 0\neq\rho\in R\text{为常数}, \tag{1.12}$$

称 $\lambda,\mu$ 为点 $X$ 关于一维射影坐标系 $(PQ|E)$ 的 **齐次射影坐标**, 记作 $(\lambda,\mu)$.

根据定义 1.11, 点 $P,Q,E$ 在射影坐标系 $(PQ|E)$ 下的齐次射影坐标分别可取为 $(1,0)$, $(0,1)$ 和 $(1,1)$. 因此，笛氏齐次坐标也是一种射影坐标，今后将不再区分一维笛氏齐次坐标与一维射影坐标.

利用非齐次参数表示，也可得到点的一维非齐次射影坐标，不过，此时我们取 $\dfrac{\lambda}{\mu}$. 点 $P,Q,E$ 在坐标系 $(PQ|E)$ 下的非齐次射影坐标分别为 $\infty,0,1$.

**五、实 − 复射影平面**

在实际问题的研究中，我们常常会需要虚点或虚直线. 为此，有必要引进虚元素概念. 记 $C$ 表示复数域，在定义 1.9 中，如果将坐标类的集合分别改为 $CP^2$ 和 $(CP^2)^*$, 则可以得到 **复射影平面** 的定义, 而且此时射影坐标系、射影坐标变换都在复数域上定义. 类似于 §1.1, 我们也可以将复欧氏平面拓广，得到复射影平面的拓广平面模型. 但是本教材并不研究复射影平面, 我们仅仅在实射影平面上引进虚元素，而坐标系和坐标变换仍然在实数域上定义. 直观地说，是把实射影平面嵌入到复射影平面中，将其作为复射影平面的子空间加以研究. 在这样的平面上，虚点、实点；虚直线、实直线的身份不会因坐标变换 (进而不会因非奇异线性变换) 而改变，我们将如此加入虚元素后的实射影平面称为 **实 − 复射影平面**.

由于齐次坐标的特点，在实 − 复射影平面上，一个点是虚点还是实点，不能仅看它的齐次坐标是虚数还是实数；一条直线是虚直线还是实直线, 也不能单纯由其一组坐标看出. 比如 (i, i, i) 就是一个实点.

**定义 1.12** 在实 − 复射影平面上，点 $P(x_1,x_2,x_3)$ 称为 **实点**, 如果存在 $0\neq\rho\in C$, 使得 $\rho x_j\in R$； 否则称 $P$ 为 **虚点**.

对于直线，我们也有类似定义. 需要指出的是，实直线上可以有虚点，虚直线上也可以有实点；过实点可以有虚直线，过虚点也可以有实直线.

**定义 1.13** 对于两个元素 (点或直线)$a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, 若存在复

数 $\rho \neq 0$, 使得

$$\rho b_i = \bar{a}_i,$$

则称元素 $a$ 与 $b$ 为一对 **共轭复元素**. 记作 $b = \bar{a}$ 或 $a = \bar{b}$.

由定义可见，仅凭一组坐标往往不能立即判定两个元素是否共轭.

显然，在实－复射影平面上点与直线的关联关系仍为 (1.2) 式，故此前所得到的关于点和直线的基本结论仍然成立. 在实－复射影平面上，下列结论是显然的.

(1) 点 $x$ 在直线 $u$ 上的充要条件是点 $\bar{x}$ 在直线 $\bar{u}$ 上.

(2) 虚点 $x$ 在实直线 $u$ 上的充要条件是点 $\bar{x}$ 在直线 $u$ 上.

(3) 实直线上的点或为实点或为成对出现的共轭虚点.

(1)′ 直线 $u$ 过点 $x$ 的充要条件是直线 $\bar{u}$ 过点 $\bar{x}$.

(2)′ 虚直线 $u$ 过实点 $x$ 的充要条件是 $\bar{u}$ 过 $x$.

(3)′ 通过一实点的直线或为实直线或为成对出现的共轭虚直线.

(4) 两共轭虚点的连线为实直线.

(5) 过一虚点有且仅有一条实直线.

(4)′ 两共轭虚直线的交点为实点.

(5)′ 在一条虚直线上有且仅有一个实点.

今后，如无特别声明，本教材将总讨论实－复射影平面，在不致引起混淆的情况下，也直接称之为射影平面.

**例 1.11** 求证：三点 (1+i,−1+i),(1,1+i), (i,−1−i) 共线，并求其上的实点.

**证** 将已知三点的坐标化为齐次，并验证

$$\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得此三点共线.

为求此直线上的实点，只要求出此直线的方程

$$2(1+\mathrm{i})x_1 - (1-\mathrm{i})x_2 - 2\mathrm{i}x_3 = 0,$$

以及其共轭直线

$$2(1-\mathrm{i})x_1 - (1+\mathrm{i})x_2 + 2\mathrm{i}x_3 = 0.$$

此二直线的交点即为所求实点，坐标为 $(1, 2, 2)$.

### 六、图形的射影性质

研究射影平面上的元素及其关系、性质的数学称为平面射影几何学，这些关系一般通过图形反映，因此可以说射影几何是研究图形的射影性质的数学．具体地说，射影性质是指图形在射影变换下保持不变的那些性质 (称为 **射影不变性**) 和数量 (称为 **射影不变量**). 我们将在第二章具体学习射影变换，从拓广平面模型出发，可以说图形的射影性质就是图形在中心射影之下保持不变的那些性质和数量.

回顾迄今为止所知的图形及其相关的性质和数量，容易看出，点与直线的关联关系，点列、线束、点场、线场、三点形与三线形等等都是射影不变的．而直线的平行、夹角，两点间的距离，封闭图形的面积等等都不是射影不变的，此外我们所熟知的图形如平行四边形，圆，椭圆等等也都不是射影不变的.

### 习　题　1.3

1. 实射影平面的束模型．以拓广平面 $\alpha$ 上的通常线束和理想线束作为“点”， $\alpha$ 上的通常直线和其上的惟一理想直线作为直线，规定直线与点相关联当且仅当该直线属于这个线束．试证明这是实射影平面的一个模型.

2. 实射影平面的丛模型．在三维欧氏空间 $E^3$ 中取定一点 $S$. 令

$$\pi=\{E^3\text{中过 } S \text{ 的全体直线}\}\cup\{E^3\text{中过 } S \text{ 的全体平面}\},$$

称 $\pi$ 为 $E^3$ 中过点 $S$ 的直线丛与平面丛，将其中的直线作为 $\pi$ 的“点”，其中的平面作为 $\pi$ 的“直线”，并规定“点”与“直线”相关联当且仅当在 $E^3$ 中相应的直线在相应的平面上．试证明这是实射影平面的一个模型.

3. 设射影平面上三点 $A,B,C$ 在某取定射影坐标系下的齐次坐标依次为 $(0,0,1)$, $(1,2,3)$, $(2,-1,4)$. 证明此三点不共线，另求一点 $E$, 构成新的射影坐标系 $(ABC|E)$, 并求出射影坐标变换的逆式.

4. 求两点 $A(1+\mathrm{i},2-\mathrm{i},1)$ 与 $B(1-\mathrm{i},2+\mathrm{i},1)$ 的连线方程.

5. 设 $a,b$ 为实 – 复射影平面上的两个点．试导出下列结论：

(1)　若 $a_3\neq0$, 则 (若共轭必有)$b_3\neq0$, 于是,

$$a\text{与}b\text{共轭}\Longleftrightarrow\frac{b_i}{b_3}=\frac{\overline{a_i}}{\overline{a_3}}\qquad(i=1,2).$$

(2)　若 $a_3=0$, 则 (若共轭必有)$b_3=0$, 于是,

$$a\text{与}b\text{共轭}\Longleftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\overline{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)}\text{或}\frac{a_2}{a_1}=\overline{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)}.$$

6. 求证： A(2,i,1−i) 与 B(2+2i,1−i,2i) 为一对共轭虚点，并求其连线方程.

7. 求通过点 (1,i,0) 的实直线.

8. 求直线 [2,i,3−4i] 上的实点.

9. 求无穷远直线 $x_3=0$ 与平面上的圆 $(x_1-ax_3)^2+(x_2-bx_3)^2=R^2x_3^2$ 的交点.

*10. 对本节实射影平面的定义作如下修改：将 $RP^2$ 中的实数域 $R$ 改为任一有限域 $F$, 类似地可以得到域 $F$ 上的三元非零向量类的集合 $FP^2$(注意此时向量的加法，数乘等都在有限域 $F$ 上进行), 这样就可以定义有限域 $F$ 上的射影平面，称为有限射影平面. 试取 $F$ 为整数集模 3 同余类展开有限射影平面的研究. 对今后学习到的关于实射影平面的各种知识，都在该有限射影平面上进行移植尝试.

## §1.4 平面对偶原则

对偶原则亦称对偶原理，是贯穿射影几何始终的一个最重要的基本原理，本书只讨论平面射影几何，所以我们仅给出平面对偶原则.

### 一、平面对偶原则

1. 基本概念

**定义 1.14** 在射影平面上，称“点”与“直线”为一对 **对偶元素**.

**定义 1.15** 在射影平面上，称“过一点作一直线”与“在一直线上取一点”为一对 **对偶运算**.

**定义 1.16** 在射影平面上，将互换对偶元素的地位和作对偶运算统称为 **对偶变换**.

**定义 1.17** 在射影平面上，设已知由点、直线及其关联关系构成的图形 $\Sigma$. 对图形 $\Sigma$ 作对偶变换，即把 $\Sigma$ 中的各元素改成其对偶元素，各运算改成其对偶运算，则得到另一个图形 $\Sigma'$. 称 $\Sigma$ 与 $\Sigma'$ 为一对 **对偶图形**.

2. 基本对偶图形举例

以下所论图形均指同一平面而言.

| | |
|---|---|
| (1) 点. | (1)′ 直线. |
| (2) 点列 (同一直线上点的集合). | (2)′ 线束 (过同一点的直线的集合). |
| (3) 点场 (同一平面上点的集合). | (3)′ 线场 (同一平面上直线的集合). |
| (4) 简单 $n$ 点形： $n$ 个点 (其中无三点共线) 及其两两顺次连线所构成的图形. 这 $n$ 个点称为顶点， $n$ 条直线称为边. | (4)′ 简单 $n$ 线形： $n$ 条直线 (其中无三线共点) 及其两两顺次相交的交点所构成的图形. 这 $n$ 条直线称为边，$n$ 个交点称为顶点. |

对于简单 $n$ 点 (线) 形，图 1.12 和 1.13 分别给出了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形. 显然，对于给定的 $n$ 个点 (或 $n$ 条直线), 由它们所构成的简单 $n$ 点形 (简单 $n$ 线形)

与这 $n$ 个点 ($n$ 条直线) 的排序有关. 此外, 这两类图形与初等几何中的多边形也是不同的概念.

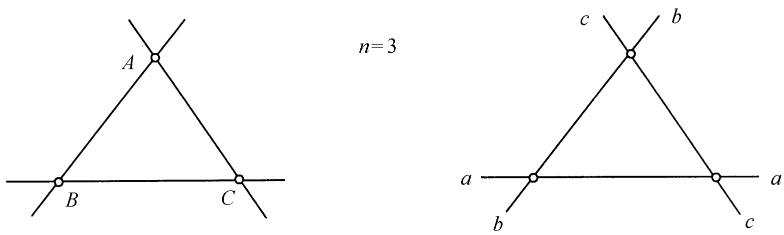



图 1.12　简单三点形和简单三线形

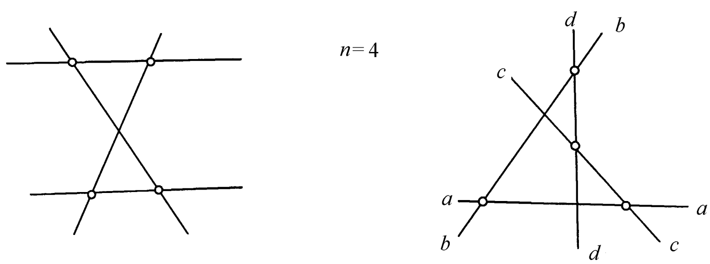



图 1.13　简单四点形和简单四线形

(5)　完全 $n$ 点形: $n$ 个点 (其中无三点共线) 及其每二点连线所构成的图形.

不难看出, 完全 $n$ 点形共有 $n$ 个顶点, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 条边.

(5)$'$　完全 $n$ 线形: $n$ 条直线 (其中无三线共点) 及其每二条直线的交点所构成的图形.

不难看出, 完全 $n$ 线形共有 $n$ 条边, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个顶点.

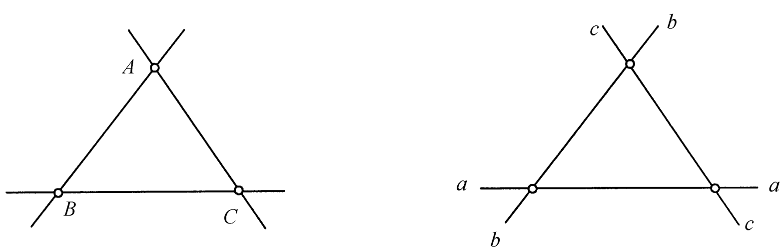



图 1.14　三点形与三线形

注意, 完全形与初等几何中的 $n$ 边形没有任何共同之处. 对于给定的 $n$ 个点

(其中无三点共线) 或 $n$ 条线 (其中无三线共点), 由其决定的完全 $n$ 点形或完全 $n$ 线形是惟一的.

最常见的例子是 $n=3$, 三点形与三线形 (如图 1.14), 这是一对 **自对偶图形**, 今后将不加区别地使用这二概念.

最重要的例子是完全四点形与完全四线形. 因为这一对图形中蕴含着十分重要的射影性质, 其应用将在今后无可避免地反复出现, 一定要熟练地掌握这一对对偶图形. 为此, 我们对照图 1.15 和 1.16 详细说明完全四点形和完全四线形的各种元素的名称. 在第二章中将专门研究完全四点形和完全四线形的射影性质.

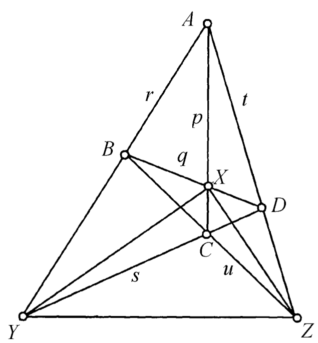



图 1.15　完全四点形

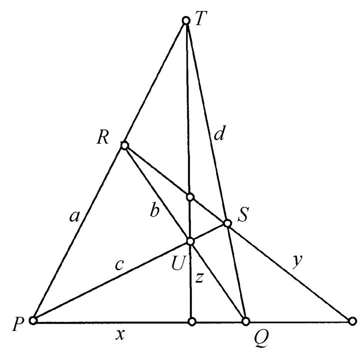



图 1.16　完全四线形

名称: **完全四点形**$ABCD$

**顶点**: $A, B, C, D$ (4 个)

**边**: $p, q$;　$r, s$;　$t, u$

$AC, BD$; $AB, CD$; $AD, BC$ (6 条)

**对边**: 没有公共顶点的边.

$p, q$;　$r, s$;　$t, u$ (3 组)

**对边点**: 对边的交点.

$X$,　$Y$,　$Z$

$p\times q$;　$r\times s$;　$t\times u$ (3 个)

**对边三点形**: 三点形 $XYZ$.

名称: **完全四线形**$abcd$

**边**: $a, b, c, d$ (4 条)

**顶点**: $P, Q$;　$R, S$;　$T, U$

$a\times c, b\times d$; $a\times b, c\times d$; $a\times d, b\times c$ (6 个)

**对顶**: 不在同一条边上的顶点.

$P, Q$;　$R, S$;　$T, U$ (3 组)

**对顶线**: 对顶的连线.

$x$,　$y$,　$z$

$PQ$,　$RS$,　$TU$ (3 条)

**对顶三线形**: 三线形 $xyz$.

学习对偶图形最常遇到的困难是如何作出已知图形的对偶图形, 下面的例子给出了一个一般的方法.

**例 1.12**　画出图 1.17 所示两图形的图形的平面对偶图形.

**解**　一般地, 可按下列步骤来做.

第一步: 观察图形的结构, 找出图形中共有几个点、几条直线, 把这些点和直

线分别标上字母 (如图 1.17).

第二步：分析并列出图中的点与直线的关联关系 (即运算关系).

第三步：翻译. 把上述两步中所列的各元素换成其对偶元素，各运算换成其对偶运算.

第四步：根据第三步所得结果，画出所求对偶图形.

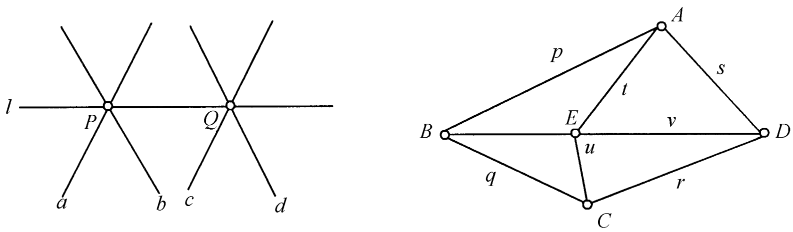



图 1.17

下面给出本例的具体解题过程.

| | |
|---|---|
| (1) 点： $P, Q$ 2 个 | $(1)'$ 直线： $p, q$ 2 条 |
| 直线： $l, a, b, c, d$ 5 条 | 点： $L, A, B, C, D$ 5 个 |
| 关联关系： | 关联关系： |
| (i) $P, Q$ 在 $l$ 上； | (i) $p, q$ 通过 $L$ ； |
| (ii) $a, b, l$ 共点于 $P$，$c, d, l$ 共点于 $Q$. | (ii) $A, B, L$ 共线于 $p$, $C, D, L$ 共线于 $q$. |
| (2) 点： $A, B, C, D, E$ 5 个 | $(2)'$ 直线： $a, b, c, d, e$ 5 条 |
| 直线： $p, q, r, s, t, u, v$ 7 条 | 点： $P, Q, R, S, T, U, V$ 7 个 |
| 关联关系： | 关联关系： |
| (i) $B, E, D$ 共线于 $v$; | (i) $b, d, e$ 共点于 $V$; |
| (ii) $A$ 分别与 $B, E, D$ 连线为 $p, t, s$, $C$ 分别与 $B, E, D$ 连线为 $q, u, r$. | (ii) $a$ 分别与 $b, e, d$ 相交于 $P, T, S$, $c$ 分别与 $b, e, d$ 相交于 $Q, U, R$. |

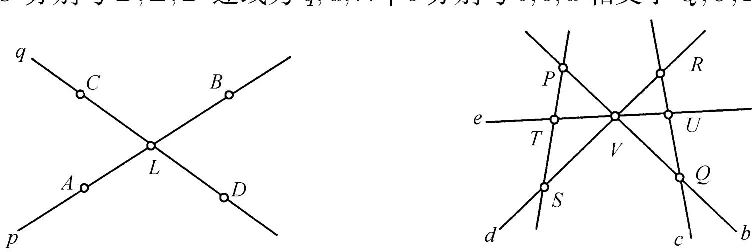



图 1.18

根据上述分析，作出对偶图形如图 1.18.

3. 平面对偶原则

**定义 1.18** 在射影平面上，若命题 $A$ 仅与点和直线的关联、顺序关系以及图形的射影性质有关，则称 $A$ 为一个 **射影命题** .

**定义 1.19** 在射影平面上，对于给定的射影命题 $A$, 对其作对偶变换得到另一个射影命题 $P_A$, 称 $A$ 与 $P_A$ 为一对 **对偶命题**.

**例 1.13** 对偶命题举例.

| $A$ 过相异二点有且仅有一条直线. | $P_A$ 两相异直线有且仅有一个交点. |
|---|---|
| $A$ 如果两个三点形的对应顶点连线共点，则它们的对应边的交点必定共线. | $P_A$ 如果两个三线形的对应边交点共线, 则它们的对应顶点的连线必定共点. |
| $A$ 如果两个完全四点形的五对对应边的交点在同一直线上，则其第六对对应边的交点也在此直线上，而且其四对对应顶点的连线交于一点. | $P_A$ 如果两个完全四线形的五对对应顶点的连线通过同一点, 则其第六对对应顶点的连线也通过此点, 而且其四对对应边的交点在同一直线上. |

由射影平面与其对偶平面的关系，立刻可得下述重要定理.

**定理 1.12**(平面对偶原则) 在射影平面上, 射影命题 $A$ 成立 $\Longleftrightarrow$ 射影命题 $P_A$ 成立.

平面对偶原则深刻地刻画了点几何与线几何之间的关系. 有了平面对偶原则，在射影平面上，我们证明了一个几何命题 (射影命题) 之同时，也就证明了其对偶命题，使得我们的研究工作起到了事半功倍的作用. 此外，当一个射影命题的证明比较困难时，我们往往可以考虑改证其对偶命题.

## 二、代数对偶原则

平面对偶原则最基本的出发点是在平面上的点的集合和直线的集合之间规定了一个一一对应关系. 从而也建立了图形与图形、命题与命题之间的一一对应关系. 我们来讨论如何用代数的方法刻画这个对应，即代数对偶.

我们曾经将方程 $\sum\limits_{i=1}^{3} u_i x_i = 0$ 称为点与直线的关联关系. 事实上，对这一方程的不同解释，就揭示了这一对对偶元素之间的一种代数关系. 从此出发，我们可以导出用代数语言给出的对偶原则.

对于给定的一次齐次方程

$$A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3 = 0. \tag{1}$$

点几何观点：视 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 为点的流动坐标，则方程 (1) 代表坐标为 $[A,B,C]$ 的直线.

线几何观点：视 $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$ 为直线的流动坐标，则方程 (1) 代表坐标为 $(A,B,C)$ 的点.

对于给定的齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1\xi_1+B_1\xi_2+C_1\xi_3=0, \\ A_2\xi_1+B_2\xi_2+C_2\xi_3=0. \end{cases} \tag{2}$$

点几何观点：方程组 (2) 表示两直线的交点，解出坐标为 $(A,B,C)$.

线几何观点：方程组 (2) 表示两点的连线，解出坐标为 $[A,B,C]$.

综上分析，我们可以合理地将坐标相同的一对点与直线视为代数对偶元素，从而给出代数对偶原则 [1). 事实上，这些分析不过是对射影平面与其对偶平面作了进一步的理解，而假如我们将射影平面上的几何学称为“点几何学”，则以其对偶平面为模型研究的几何学自然就是“线几何学”了.

下面给出代数对偶的一些基本命题.

(1) 点 $(A,B,C)$

方程 $Au_1+Bu_2+Cu_3=0$.

(2) 原点 $(0,0,1)$

方程 $u_3=0$.

(3) 无穷远直线上的点 $(A,B,0)$

方程 $Au_1+Bu_2=0$.

(4)～(8) 定理 1.5～ 定理 1.9.

(1)′ 直线 $[A,B,C]$

方程 $Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$.

(2)′ 无穷远直线 $[0,0,1]$

方程 $x_3=0$.

(3)′ 过原点的直线 $[A,B,0]$

方程 $Ax_1+Bx_2=0$.

(4)′ ～ (8)′ 定理 1.5′ ～ 定理 1.9′.

## 习 题 1.4

1. 作出下列图形的对偶图形.

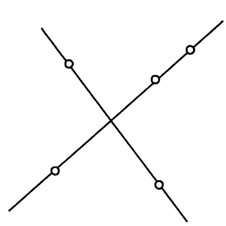


图 1.19

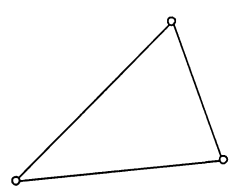


图 1.20

1) 这里规定的代数对偶实际上是 $RP^2$ 与 $(RP^2)^*$ 之间的一个恒同映射. 事实上，$RP^2$ 与 $(RP^2)^*$ 之间还可以有其他双射决定代数对偶，例如将在第四章讨论的配极对偶原则.

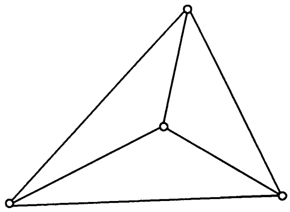


图 1.21

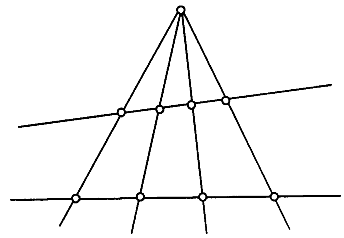


图 1.22

2. 写出下列命题的对偶命题并画出其对偶图形.

如图 1.23, 设有变动的三点形 $ABC$. 如果其边 $BC, CA, AB$ 分别通过共线的三个定点 $P, Q, R$, 而且顶点 $B, C$ 分别在定直线 $p, q$ 上，则顶点 $A$ 也在一条定直线 $r$ 上.

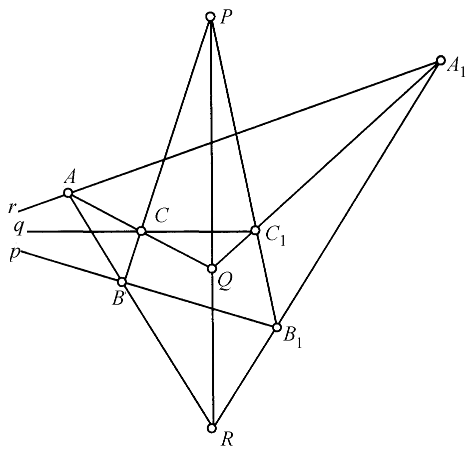



图 1.23

3. 写出下列命题的对偶命题.

设在两条直线 $l_1, l_2$ 上各取定相异三点 $A_1, B_1, C_1$ 和 $A_2, B_2, C_2$. 求证： $B_1C_2$ 与 $B_2C_1$ 的交点， $C_1A_2$ 与 $C_2A_1$ 的交点， $A_1B_2$ 与 $A_2B_1$ 的交点三点共线 ( Pappus 定理).

4. 写出下列命题的对偶命题.

设三点形 $ABC$ 的三边 $BC, CA, AB$ 的方程分别为 $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$, 又有分别过 $A, B, C$ 的三直线. 求证：此三直线共点 $\Longleftrightarrow$ 其方程可以表为 $q\beta - r\gamma = 0$, $r\gamma - p\alpha = 0$, $p\alpha - q\beta = 0$, 其中 $p, q, r$ 为常数.

5. 下述命题中，哪一个有对偶命题？如果有，请写出.

(1) 平面上相异四点，其中无三点共线，有六条直线将它们两两相连.

(2) 平行四边形的对角线相互平分.

(3) 设 $A, B, C$ 为不共线三点， $D, E$ 为相异二点，满足 $B, C, D$ 共线且 $C, A, E$ 共线.

则存在点 $F$, 使得 $A,B,F$ 共线且 $D,E,F$ 共线.

(4) 同弧所对的圆周角相等.

6. 写出下列命题的对偶命题.

设 $OX,OY,OZ$ 为三条定直线, $A,B$ 为二定点, 其连线通过点 $O$, 又点 $R$ 为 $OZ$ 上的动点, 且 $RA,RB$ 分别交 $OX,OY$ 于点 $P,Q$. 求证: $PQ$ 通过 $AB$ 上的一个定点.

7. 写出下列命题的对偶命题.

设 $A,B$ 为二定点, $XY$ 为定直线. 在 $XY$ 上任取两点 $P,Q$, 设 $AP$ 交 $BQ$ 于 $L$, $AQ$ 交 $BP$ 于 $M$. 求证: $LM$ 通过 $AB$ 上的一个定点.

## §1.5 Desargues 定理

Desargues 定理是一个古老而著名的定理, 有着重要的应用.

### 一、 Desargues 定理

**定理 1.13**(Desargues 定理) 如果两个三点形的对应顶点连线共点, 则其对应边的交点必定共线.

**定理 1.13′**(Desargues 定理的逆定理) 如果两个三点形对应边的交点共线, 则其对应顶点的连线必定共点.

**证明** 根据对偶原则, 我们只要证明上述定理中的一个. 现利用代数法证明 Desargues 定理.

如图 1.24, 设三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 满足 $AA',BB',CC'$ 共点于 $O$. 设其对应边的交点为 $BC\times B'C'=X$, $CA\times C'A'=Y$, $AB\times A'B'=Z$. 我们来证明 $X,Y,Z$ 三点共线.

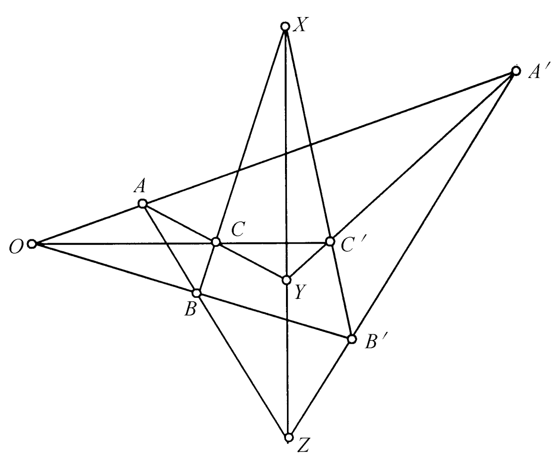



图 1.24

取定坐标系, 并设 $A, B, C, A', B', C', O$ 诸点的齐次坐标依次为 $a, b, c, a', b', c'$, $o$.

因为 $A, A', O$ 在同一直线上，据 §1.2 定理 1.8, 有

$$o = pa - p'a'.$$

同理,

$$o = qb - q'b',$$

$$o = rc - r'c',$$

其中， $p, p'; q, q'; r, r'$ 为常数．由上述三式可以推出

$$\begin{cases} qb - rc = q'b' - r'c', \\ rc - pa = r'c' - p'a', \\ pa - qb = p'a' - q'b'. \end{cases} \tag{1}$$

考察 (1) 的第一式， $qb - rc$ 与 $q'b' - r'c'$ 表示同一个点的齐次坐标．由左边，此点在 $BC$ 上，但是由右边，此点在 $B'C'$ 上，因此这个点必定是 $BC \times B'C' = X$. 从而，等式的左右两边均表示点 $X$ 的齐次坐标.

同理， $Y$ 的齐次坐标为 $rc - pa$ 或 $r'c' - p'a'$ ； $Z$ 的齐次坐标为 $pa - qb$ 或 $p'a' - q'b'$.

注意到 (1) 式两边相加都等于零，据 §1.2 定理 1.9, $X, Y, Z$ 三点共线，证毕.

满足 Desargues 定理条件的两个三点形称为是具有透视位置的三点形, 图 1.24 表示了这样一对三点形．我们称点 $O$ 为三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 的 **透视中心**, 而称对应边的交点 $X, Y, Z$ 所在直线为 **透视轴**. 这样， Desargues 定理及其逆定理实际上是说 “一对对应三点形 (三线形) 具有透视中心的充要条件是具有透视轴”．我们也把透视中心和透视轴分别称为 **Desargues 点** 和 **Desargues 线**.

纵观图 1.24, 其中共标出 10 个点和 10 条直线，通过每个点有三条直线，在每条直线上有三个点，图中的每个点与每条直线的地位都是平等的，我们称此图为 **Desargues 构图**. 所谓平等，是指可以把图中任一个点作为 Desargues 点， (利用图中所标字母) 在图中可找到一对透视的对应三点形，以指定点为透视中心，并以 10 条直线之一为透视轴；反之，对于图中每一条直线也可做相应的工作．比如，以 $A'$ 为 Desargues 点的一对透视三点形为 $OB'C'$ 与 $AZY$, 其对应的 Desargues 线为直线 $BXC$.

建议读者将此图中每个点作为 Desargues 点，找出以它为透视中心的一对对应三点形及其透视轴；将每条直线作为 Desargues 线，找出以其为透视轴的一对对应三点形及其透视中心.

## 二、应用举例

1. 证明共点线和共线点问题

**例 1.14** 对于欧氏平面上的三角形 $ABC$, 设其高线分别为 $AD$,$BE$,$CF$. 而 $BC \times EF = X$, $CA \times FD = Y$, $AB \times DE = Z$. 求证： $X,Y,Z$ 三点共线.

**证明** 如图 1.25, 直接应用 Desargues 定理，考虑一对对应三点形 $ABC$ 和 $DEF$, 因为其对应顶点连线即为 $\triangle ABC$ 的三条高线，故共点于垂心 $G$. 从而三对对应边的交点 $X,Y,Z$ 三点共线.

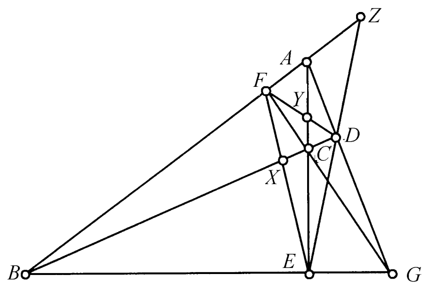



图 1.25

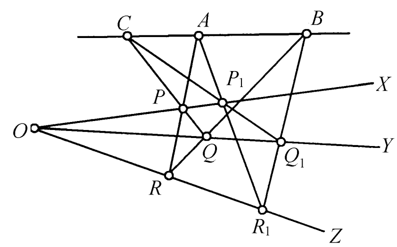



图 1.26

**例 1.15** 设 $OX,OY,OZ$ 为三条定直线， $A,B$ 为二定点，点 $R$ 为 $OZ$ 上的动点，且直线 $RA,RB$ 分别与 $OX,OY$ 交于点 $P,Q$. 求证： $PQ$ 通过 $AB$ 上一个定点.

**证明** 利用 Desargues 定理. 如图 1.26, 在 $OZ$ 上另取一点 $R_1$, 按题意作出 $P_1,Q_1$. 考察三点形 $PQR$ 与 $P_1Q_1R_1$, 因为其具有透视中心 $O$, 故其对应边的交点 $A,B,C$ 三点共线，即 $PQ$, $P_1Q_1$, $AB$ 共点于 $C$, 换句话说， $PQ$ 过 $AB$ 上的定点 $C$.

**例 1.16** 设三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 是透视的, $BC'\times B'C = L$, $CA'\times C'A = M$, $AB' \times A'B = N$ (如图 1.27). 求证：

(1) $BC,B'C',MN$ 共点；

(2) 三点形 $ABC$, $A'B'C'$ 与 $LMN$ 两两透视.

**证明** 设三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 的透视中心为 $O$. 考察三点形 $BCA'$ 与 $B'C'A$. 因为 $BB'$,$CC'$, $A'A$ 共点于 $O$, 据 Desargues 定理知， $BC$ 与 $B'C'$ 的交点 $X$, $CA'$ 与 $C'A$ 的交点 $M$ 以及 $BA'$ 与 $B'A$ 的交点 $N$ 三点共线. 因此， $BC$, $B'C'$, $MN$ 共点于 $X$.

同理， $CA,C'A',NL$ 共点于 $Y$. $AB$, $A'B'$, $ML$ 共点于 $Z$. 但是因为三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 透视， $X,Y,Z$ 三点共线，所以三点形 $ABC$, $A'B'C'$ 与 $LMN$ 都

透视. (1), (2) 均得证.

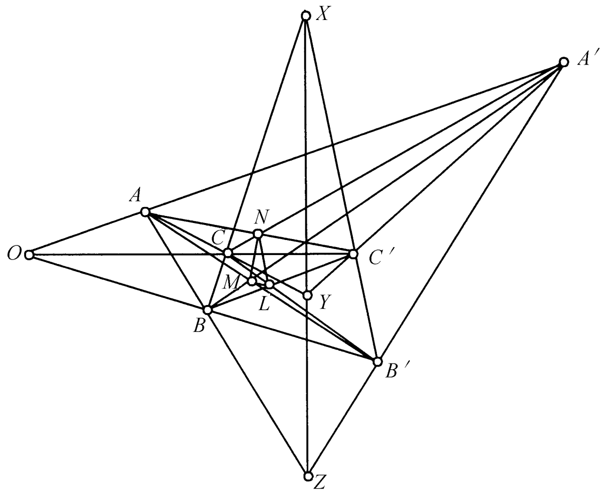



图 1.27

**例 1.17** 已知完全四点形 $PQRS$(如图 1.28), 其对边三点形为 $ABC$, 另外, 设 $A_1 = BC \times RQ$, $B_1 = AC \times RP$, $C_1 = AB \times PQ$. 求证: $A_1, B_1, C_1$ 三点共线.

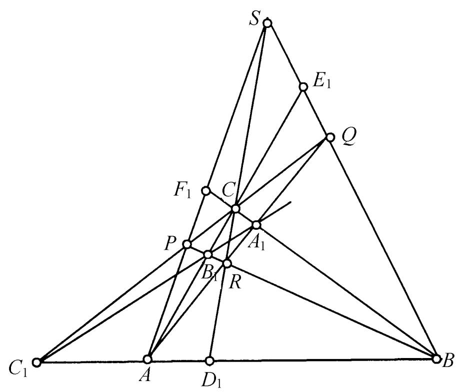



图 1.28

**证明** 考察三点形 $PQR$ 与 $ABC$, 因为它们具有透视中心 $S$, 所以有透视轴为 $A_1, B_1, C_1$ 所共之直线.

由本例可以引申出以下三点组: $A_1, B_1, C_1$; $D_1, A_1, E_1$; $D_1, B_1, F_1$; $E_1, F_1, C_1$ 均为共线三点组. 于是, 完全四点形 $PQRS$ 的对边三点形 $ABC$ 分别与四点形的

六条边交于六个点 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, 这六个点构成一个完全四线形的六个顶点，而该完全四线形的对顶三线形与三点形 $ABC$ 重合.

2. 关于不可及点的作图问题

注意，本教材从现在起，凡作图问题，如无特别声明，均指仅用无刻度直尺作图.

**例 1.18** 已知平面上二直线 $a, b$, $P$ 为不在 $a, b$ 上任一点，不定出 $a, b$ 的交点 $a \times b$, 过 $P$ 求作直线 $c$, 使 $c$ 经过点 $a \times b$.

**解** 作法： (1) 在 $a, b$ 外任取异于点 $P$ 的一点 $O$, 过 $O$ 作三直线 $l_1, l_2, l_3$, 设 $l_1, l_2$ 与 $a, b$ 的交点分别为 $A_1, A_2$ 和 $B_1, B_2$(如图 1.29).

(2) 连 $PA_1$ 交 $l_3$ 于 $A_3$, 连 $PB_1$ 交 $l_3$ 于 $B_3$.

(3) 连 $A_2A_3$, $B_2B_3$ 交于 $Q$.

(4) 直线 $PQ$ 为所求.

**证明** (留给读者自己完成. )

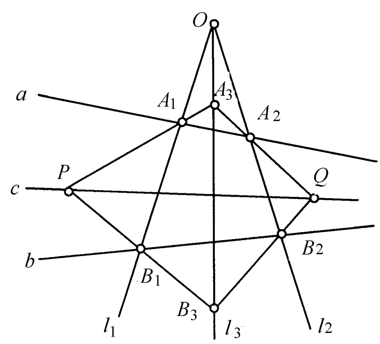



图 1.29

## 习 题 1.5

1. 如图 1.30, 设直线 $AB$ 与 $CD$ 交于 $U$, 直线 $AC$ 与 $BD$ 交于 $V$, 直线 $UV$ 分别交 $AD$,$BC$ 于 $F, G$, 直线 $BF$ 交 $AC$ 于 $L$. 证明：三直线 $LG$,$CF$,$AU$ 共点.

2. 如图 1.31, 已知射影平面上一条直线 $p$ 以及不在 $p$ 上的相异二点 $A, B$. 不允许连结 $AB$, 求作直线 $AB$ 与 $p$ 的交点 $C$.

3. 如图 1.32, 设 $a, b, c, d$ 为平面内四条直线，不允许先作出 $a, b$ 的交点和 $c, d$ 的交点，求作一直线 $l$, 使得 $l$ 通过这两个交点.

4. 如图 1.33, 设 $ABCD$ 是一个四面体，点 $X$ 在 $BC$ 上，一直线通过 $X$ 分别交 $AB$, $AC$ 于 $P, Q$. 另一直线通过 $X$ 分别交 $DB$,$DC$ 于 $R, S$. 求证： $PR$ 与 $QS$ 的交点在 $AD$ 上.

5. 设三个共面的三点形是两两透视的且有公共的透视中心. 证明：三条透视轴共点.

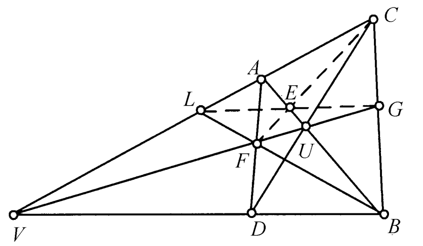



图 1.30

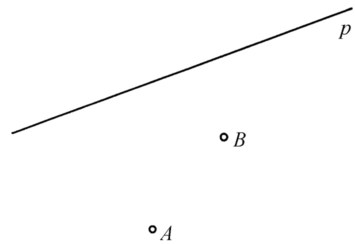



图 1.31

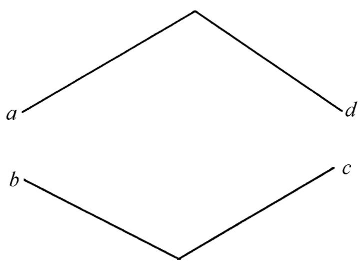



图 1.32

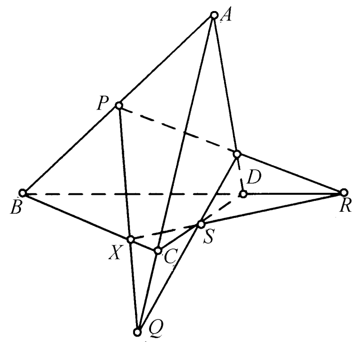



图 1.33

6. 如图 1.34, 设 $A, B, C$ 为不共线三点，$P$ 是过 $C$ 的一条定直线上的动点，$AP \times BC = X$, $AC \times BP = Y$. 求证：$XY$ 通过一个定点.

7. 如图 1.35, 设有三点形 $ABC$, 在其三边 $BC, CA, AB$ 上分别取点 $A', B', C'$. 设 $B'C' \times BC = F$, $C'A' \times CA = G$, $A'B' \times AB = H$. 又 $FH \times BB' = M$, $FG \times CC' = N$. 证明：三直线 $MG, NH, BC$ 共点.

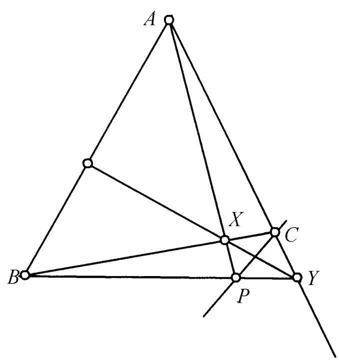



图 1.34

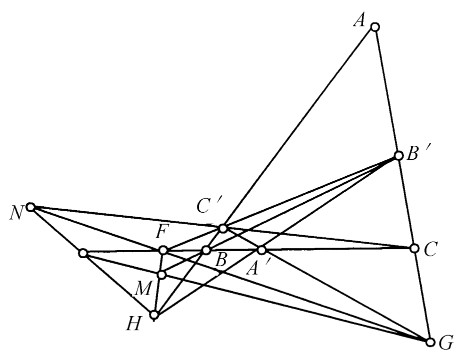



图 1.35

8. 利用 Desargues 定理证明三角形的三条中线共点.

9. 设平行四边形 $EFGH$ 的顶点分别在另一个平行四边形 $ABCD$ 的各边上. 利用 Desargues 定理证明：这两个平行四边形的四条对角线共点.

10. 在拓广平面上，若两个三点形的透视中心是无穷远点或透视轴是无穷远直线，问根据 Desargues 定理能够得到什么命题？

# 第二章　射 影 变 换

本章首先定义交比这一基本的射影不变量，然后分别讨论一维与二维射影变换及其基本性质.

## §2.1　交　　比

交比是基本的射影不变量，其他所有射影不变量都与交比有关，今后将要学习的射影几何内容，几乎都与交比有着密切的联系. 我们用代数的方法给出交比的定义，并试图建立其初等几何意义并给出若干简单应用.

### 一、点列中四点的交比

1. 定义

**定义 2.1**　设 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 为点列 $l(P)$ 中四点，且 $P_1 \neq P_2$, 其齐次坐标分别为 $a$, $b$, $a+\lambda_1 b$, $a+\lambda_2 b$. 记 $(P_1P_2, P_3P_4)$ 表示由这四点构成的一个 **交比**, 定义为

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{2.1}$$

称 $P_1, P_2$ 为 **基点对**, $P_3, P_4$ 为 **分点对**.

定义 2.1 是以前两个点作为基点对后两点进行非齐次参数表示. 事实上，点列中的四点可以由该点列中任何相异二点为基点作非齐次参数表示，利用齐次坐标的性质可以证明下述结论.

**定理 2.1**　设点列 $l(P)$ 中四点 $P_i$ 的坐标依次为 $a+\lambda_i b (i=1,2,3,4, \lambda_1 \neq \lambda_2)$, 其中 $a, b$ 为 $l(P)$ 中取定的相异二点 $A, B$ 的齐次坐标. 则

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}. \tag{2.2}$$

**证明**　设 $a+\lambda_1 b = a'$, $a+\lambda_2 b = b'$. 则

$$a = \frac{a'\lambda_2 - b'\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad b = \frac{b'-a'}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

于是 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 的坐标可表示为

$$a', \quad b', \quad \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_1}a' + \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b', \quad \frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_1}a' + \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b',$$

或者

$$a', \quad b', \quad a' + \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}b', \quad a' + \frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_4}b'.$$

由定义 2.1, 有

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}.$$

2. 交比的简单性质

由定理 2.1, 假定我们取齐次笛氏坐标，并且假定所论四点均为有穷远点，则 (在忽略坐标变换的前提下) 其中的参数 $\lambda_i$ 可视为点 $P_i$ 到原点的有向距离，于是由定理 2.1 可以推出交比的初等几何表示

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4}. \tag{2.3}$$

上式的右边均为有向线段.

由定义 2.1 容易看出, 共线四点的交比值显然与点在交比记号中的顺序有关, 改变顺序，一般要改变交比值. 所以，相异四点应可构成 $4! = 24$ 个交比.

设 $(P_1P_2, P_3P_4) = r$, 可以证明, 当改变交比记号中点的次序时, 取定共线四点的交比值有如下变化规律.

**定理 2.2** 改变共线四点在交比记号中的位置时, 四点的交比值的改变情况如下：

(1) 交换基点对与分点对的位置或同时交换基点对与分点对中两点的位置不改变共线四点的交比值.

(2) 仅交换基点对或分点对中二点的位置，共线四点的交比值由 $r$ 变为 $1/r$; 仅交换交比记号中的中间或首尾二点的位置，共线四点的交比值由 $r$ 变为 $1-r$.

由定理 2.2 可以推知，共线四点构成的 24 个交比一般可以分为 6 组，每组 4 个相等. 我们列出这 6 组交比如下，读者不必背诵它，关键是熟悉定理 2.2. 为方便起见，简记 $1,2,3,4$ 表示 $P_1, P_2, P_3, P_4$.

$$\begin{cases} r = (12,34) = (34,12) = (21,43) = (43,21), \\ \dfrac{1}{r} = (21,34) = (34,21) = (43,12) = (12,43), \\ 1-r = (13,24) = (24,13) = (42,31) = (31,42), \\ \dfrac{1}{1-r} = (31,24) = (24,31) = (42,13) = (13,42), \\ 1-\dfrac{1}{r} = (14,23) = (23,14) = (32,41) = (41,32), \\ \dfrac{r}{r-1} = (41,23) = (23,41) = (32,14) = (14,32). \end{cases} \tag{2.4}$$

3. 共线四点的调和比

利用定理 2.1 不难证明下列结论.

**定理 2.3** 构成交比的四点中有某二点相同 $\Longleftrightarrow$ 这四点的交比值出现 $1, 0, \infty$ 三者之一.

根据定理 2.2 可以验证, 对于其中有两个点相同的四点的交比, 其 6 个不同的交比值又变为 3 组, 即只有 3 个不同的值 $1, 0, \infty$.

**定义 2.2** 若 $(P_1P_2, P_3P_4) = -1$, 则称 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 依此次序构成 **调和点组**, 并称此交比为 **调和比**.

调和点组也称为 **调和点列**. 对于定义 2.2 中的四点, 我们也称点偶 $P_1, P_2$ 与 $P_3, P_4$(相互)**调和共轭**, 称点偶 $P_1, P_2$ 与 $P_3, P_4$ (相互)**调和分离**, 或称点 $P_4$ 为 $P_1$, $P_2$, $P_3$ 的 **第四调和点**.

**推论 2.1** 若 $(P_1P_2, P_3P_4) = -1$, 则 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 四点互异.

**推论 2.2** 相异四点组 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 可以按某次序构成调和点组 $\Longleftrightarrow$ 这四点所构成的 6 个交比值变成 3 组, 每组两个相等, 这三个交比值分别为: $-1, \dfrac{1}{2}, 2$.

事实上, 如果 $r = -1$, 则

$$\frac{1}{r} = r = -1; \quad 1 - r = 1 - \frac{1}{r} = 2; \quad \frac{r}{r-1} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{2}.$$

也就是说, 这 6 个交比值又两两相等分为 3 组.

调和比是最重要的一种交比. 今后将要学习的许多射影性质, 都将与调和比有关.

在 (2.3) 中, 若令 $P_4 = P_\infty$, 则可以合理地认为有向线段 $P_1P_\infty$ 与 $P_2P_\infty$ 的长度相等, 而且 $\dfrac{P_1P_\infty}{P_2P_\infty} = 1$. 此时, 若 $P_3$ 为线段 $P_1P_2$ 的中点, 则 $\dfrac{P_1P_3}{P_2P_3} = -1$, 于是, 我们有

**推论 2.3** 设 $P_1, P_2, P$ 为共线的通常点, $P_\infty$ 为此直线上的无穷远点, 则 $P$ 为线段 $P_1P_2$ 的中点 $\Longleftrightarrow (P_1P_2, PP_\infty) = -1$.

4. 求共线四点的交比

利用交比的定义, 若已知共线四点的齐次坐标, 就不难求出其交比.

**例 2.1** 已知四点 $P_1(3,1,1), P_2(7,5,1), Q_1(6,4,1), Q_2(9,7,1)$. 求交比 $(P_1P_2, Q_1Q_2)$.

**解** 第一步, 验证 $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ 四点共线 (此步不可省, 否则若不共线则交比无从谈起).

第二步, 以 $P_1, P_2$ 为基点, 参数表示 $Q_1, Q_2$. 对于 $Q_1$, 设 $\rho_1 Q_1 = P_1 + \lambda_1 P_2$, 即

$$\rho_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{其中 } \rho_1 \text{ 为比例常数}),$$

解之可得 $\lambda_1 = 3, \rho_1 = 4$. 重新取 $4Q_1$ 为 $Q_1$ 的齐次坐标，得 $Q_1 = P_1 + 3P_2$.

同理，对于 $Q_2$, 设 $\rho_2 Q_2 = P_1 + \lambda_2 P_2$, 可得 $\lambda_2 = -3$, 即 $Q_2 = P_1 - 3P_2$. 所以

$$(P_1P_2, Q_1Q_2) = \frac{3}{-3} = -1.$$

**定理 2.4** 设 $P_i \in l(P)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, 并已知

$$(P_1P_2, P_3P_4) = k \qquad (k \neq 0, 1, \infty)$$

和其中三点的坐标，则可惟一确定第四点的坐标.

**例 2.2** 已知 $(P_1P_2, P_3P_4) = 2$ 且 $P_1, P_2, P_4$ 的齐次坐标依次为 $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 0, 1)$. 求 $P_3$ 的坐标.

**解** 显然 $P_4 = P_1 + P_2$, 设 $P_3 = P_1 + \lambda P_2$, 则

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{\lambda}{1} = 2,$$

所以，$\lambda = 2$. 于是 $P_3$ 的坐标为 $(3, -1, 3)$.

**推论 2.4** 设 $P_0, P_1, P_*$ 为点列 $l(P)$ 中取定的相异三点. 则

$$(P_*P_0, P_1P) \longrightarrow x$$

为 $l(P)$ 与 $\overline{R}$ 之间的一个双射.

在推论 2.4 的对应下，显然当 $P = P_*$ 时，$x = \infty$; 当 $P = P_0$ 时，$x = 0$; 当 $P = P_1$ 时，$x = 1$. 由此我们可以利用交比定义点列 (射影直线) 上的一种非齐次射影坐标. 相应于笛氏非齐次坐标，此时点 $P_*$, $P_0$, $P_1$ 分别相当于无穷远点、原点和单位点.

**例 2.3** 一直线顺次交三点形 $P_1P_2P_3$ 的三边 $P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2$ 于 $Q_1, Q_2, Q_3$. 在此三边上再顺次取点 $Q_1', Q_2', Q_3'$, 使

$$(P_2P_3, Q_1'Q_1) = k_1,\ (P_3P_1, Q_2'Q_2) = k_2,\ (P_1P_2, Q_3'Q_3) = k_3.$$

求证：(1) $Q_1', Q_2', Q_3'$ 共线 $\Longleftrightarrow k_1k_2k_3 = 1$;

(2) $P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3'$ 共点 $\Longleftrightarrow k_1k_2k_3 = -1$.

**证** (一) 准备工作

利用 §1.2 例 1.6 的对偶命题，设 $P_1, P_2, P_3$ 的坐标分别为 $a, b, c$. 因 $Q_1, Q_2, Q_3$ 为在三点形 $P_1P_2P_3$ 各边上且共线的三个点，故其坐标可以写成：

$$Q_1:\ qb - rc;\ \ Q_2:\ rc - pa;\ \ Q_3:\ pa - qb\ \ (p, q, r\text{为常数})$$

但因为 $P_i, Q_j$ 各不相同，故应有 $pqr \neq 0$.

因为 $(P_2P_3, Q_1'Q_1) = k_1$, 若设 $Q_1'$ 的坐标为 $b+\lambda_1 c$, 则 $Q_1$ 的坐标为 $b+\lambda_2 c$, 显然有 $k_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, 但是 $\lambda_2 = -\dfrac{r}{q}$, 所以 $\lambda_1 = -k_1\dfrac{r}{q}$. 从而， $Q_1'$ 的坐标可以写成

$$Q_1':\ qb - k_1 rc \qquad (k_1 \neq 0, 否则 Q_1' \equiv P_2).$$

同理

$$Q_2':\ rc - k_2 pa, \qquad Q_3':\ pa - k_3 qb,$$

而且 $k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$, 即 $k_1k_2k_3 \neq 0$.

(二) 正式证明 (见图 2.1 和图 2.2)

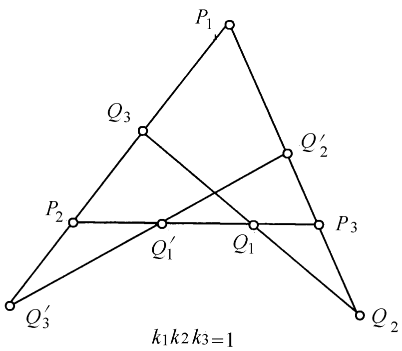



图 2.1

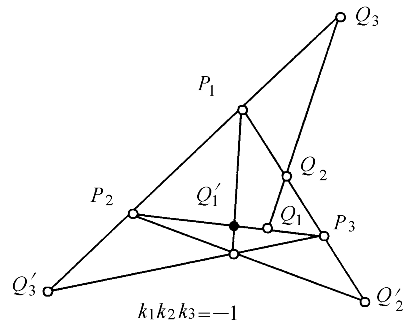



图 2.2

(1) 三点 $Q_1', Q_2', Q_3'$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的常数 $l, m, n$, 使得

$$l(qb_i - k_1 rc_i) + m(rc_i - k_2 pa_i) + n(pa_i - k_3 qb_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

或者

$$(n - k_2 m)pa_i + (l - k_3 n)qb_i + (m - k_1 l)rc_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

由于 $P_1, P_2, P_3$ 不共线且 $pqr \neq 0$, 因此有

$$\begin{cases} \quad\quad - k_2 m + n = 0, \\ l \quad\quad - k_3 n = 0, \\ -k_1 l + m \quad\quad = 0. \end{cases}$$

又 $l, m, n$, 不全为零，即上述齐次线性方程组有非零解，从而

$$\begin{vmatrix} 0 & -k_2 & 1 \\ 1 & 0 & -k_3 \\ -k_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$k_1k_2k_3=1.$$

(2) 为证 $P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3'$ 共点 $\Longleftrightarrow k_1k_2k_3=-1$, 先求出这三直线的坐标. 因为

$$P_1(a_1,a_2,a_3),\ Q_1'(qb_1-k_1rc_1, qb_2-k_1rc_2, qb_3-k_1rc_3),$$

根据 §1.2 定理 1.6, $P_1Q_1'$ 的坐标为

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ qb_2-k_1rc_2 & qb_3-k_1rc_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ qb_3-k_1rc_3 & qb_1-k_1rc_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ qb_1-k_1rc_1 & qb_2-k_1rc_2 \end{vmatrix}\right],$$

即

$$\left[q\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-k_1r\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, q\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}-k_1r\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, q\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}-k_1r\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right].$$

所以，若令 $A_i, B_i, C_i$ 表示 $a_i, b_i, c_i$ 在行列式 $|abc|$[1] 中的代数余子式，则上述坐标可以简写成

$$P_1Q_1':\ [qC_1+k_1rB_1, qC_2+k_1rB_2, qC_3+k_1rB_3].$$

即 $P_1Q_1'$ 的线坐标为

$$qC_i+k_1rB_i, \qquad i=1,2,3.$$

同理可得

$$\begin{aligned} P_2Q_2': &\quad rA_i+k_2pC_i, \\ P_3Q_3': &\quad pB_i+k_3qA_i, \end{aligned} \qquad i=1,2,3.$$

因此， $P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3'$ 共点 $\Longleftrightarrow$ 存在 $l,m,n(lmn\neq 0)$, 使得

$$l(qC_i+k_1rB_i)+m(rA_i+k_2pC_i)+n(pB_i+k_3qA_i)=0, \quad i=1,2,3$$

$$\Longleftrightarrow (k_3qn+mr)A_i+(k_1rl+np)B_i+(k_2mp+lq)C_i=0, \quad i=1,2,3.$$

由于 $\begin{cases} P_2P_3: & [A_1,A_2,A_3], \\ P_3P_1: & [B_1,B_2,B_3], \\ P_1P_2: & [C_1,C_2,C_3], \end{cases}$ 而 $P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2$ 不共点 $\Longleftrightarrow |ABC|\neq 0$

1) 为节省篇幅，本书经常将行列式或矩阵中的行 (列) 仅用表示它的向量写出.

$\Longleftrightarrow (A_i, B_i, C_i)(i=1,2,3)$ 线性无关，所以上述方程组成立 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \qquad\quad rm \quad +k_3qn = 0, \\ k_1rl \qquad\qquad +pn = 0, \\ ql \quad +k_2pm \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

但是 $lmn \neq 0$, 故上述方程组成立 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & r & k_3q \\ k_1r & 0 & p \\ q & k_2p & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow pqr(k_1k_2k_3+1)=0 \Longleftrightarrow k_1k_2k_3 = -1.\text{证毕.}$$

在 (1) 中，若 $Q_1, Q_2, Q_3$ 所在直线为无穷远直线，即 $Q_1, Q_2, Q_3$ 为无穷远点，则此时有

$$k_1 = \frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'}, \quad k_2 = \frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'}, \quad k_3 = \frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}.$$

此时结论 (1) 成为初等几何中的一个重要定理.

**Menelaus 定理** 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 $P_2P_3$, $P_3P_1$, $P_1P_2$ 上依次取三点 $Q_1'$, $Q_2'$, $Q_3'$, 则 $Q_1', Q_2', Q_3'$ 共线 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'} \cdot \frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'} \cdot \frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'} = 1.$$

同理，在结论 (2) 中，若 $Q_1, Q_2, Q_3$ 所在直线为无穷远直线，又得到初等几何中另一个重要定理

**Ceva 定理** 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 $P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2$ 上依次取三点 $Q_1', Q_2'$, $Q_3'$, 则 $P_1Q_1'$, $P_2Q_2'$, $P_3Q_3'$ 共点 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'} \cdot \frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'} \cdot \frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'} = -1.$$

### 二、线束中四直线的交比

设在平面上取定了齐次坐标，则对于线束 $S(p)$ 中的任一直线 $p$, 都有了齐次坐标 $[p]$. 这里, 我们用同一个字母表示这条直线和它的齐次坐标. 在线束 $S(p)$ 中任意取定相异二直线 $a, b$, 由定理 1.8′, 线束中任一直线 $p$ 的齐次坐标必可表为 $p = a + \lambda b$ 的形式，其中 $\lambda \in \overline{R}$ 为 **参数**. 称之为以 $a, b$ 为 **基线** 的线束 $S(p)$ 的非齐次参数表示．由对偶原则，我们可以直接给出线束中四直线交比的定义.

1. 线束中四直线交比的定义

**定义 2.3** 设 $p_1, p_2, p_3, p_4$ 为线束 $S(p)$ 中的四直线，且 $p_1 \neq p_2$. 其齐次坐标依次为 $a$, $b$, $a+\lambda_1 b$, $a+\lambda_2 b$, 记 $(p_1p_2, p_3p_4)$ 表示由这四条直线构成的一个 **交比**, 定义为

$$(p_1p_2, p_3p_4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{2.5}$$

**定理 2.5** 设线束 $S(p)$ 中四直线 $p_i$ 的坐标依次为 $a+\lambda_i b (i = 1, 2, 3, 4, \lambda_1 \neq \lambda_2)$, 其中 $a, b$ 为 $S(p)$ 中取定的相异二直线. 则

$$(p_1p_2, p_3p_4) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}. \tag{2.6}$$

2. 交比为射影不变量

**定理 2.6** 设线束 $S(p)$ 中四直线 $p_i$ 被直线 $s$ 截于四点 $P_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, 则

$$(p_1p_2, p_3p_4) = (P_1P_2, P_3P_4). \tag{2.7}$$

**证明** 设直线 $p_1, p_2, p_3, p_4$ 的坐标分别为 $a, b, a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b$, 又直线 $s$ 的坐标为 $c$. 则容易求出点 $P_i$ 的齐次坐标依次为

$$P_1\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right), P_2\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right),$$

$$P_3(P_1 + \lambda_1 P_2), \qquad P_4(P_1 + \lambda_2 P_2).$$

于是

$$(p_1p_2, p_3p_4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (P_1P_2, P_3P_4).$$

证毕.

**推论 2.5** 设 $P_i$ 为点列 $l(P)$ 中四点， $P_i$ 与不在 $l$ 上的定点 $S$ 连线依次为 $p_i (i = 1, 2, 3, 4)$. 则

$$(p_1p_2, p_3p_4) = (P_1P_2, P_3P_4).$$

由上述结论容易看出，交比在中心射影下保持不变，于是有下列重要定理.

**定理 2.7** 交比为射影不变量.

从此，直线交比问题都可化为点的交比问题来处理，反之亦然. 而且，前面讨论的关于点列的交比的一些性质都可以移植到线束的交比中. 例如，关于 24 个交比、关于交换直线在交比记号中的次序交比值的改变与不改变的情况、调和比等.

3. 四直线交比的初等几何意义

(1) 通常线束中四直线交比的斜率表示

设点 $S$ 的笛氏直角坐标为 $(x_0, y_0)$. 则以 $x=x_0, y=y_0$ 为基线，线束 $S(p)$ 中的任意直线 $p$ 的方程都可用其负斜率 $-k$ 为参数表示为 $(y-y_0)+(-k)(x-x_0)=0$, 即 $y+(-k)x+b=0$ 的形式，其中 $k\in\overline{R}$. 从而我们有下列定理.

**定理 2.8** 对于通常线束中以 $k_i$ 为斜率的四直线 $p_i$ $(i=1,2,3,4)$, 我们有

$$(p_1p_2, p_3p_4)=\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_2-k_3)(k_1-k_4)}. \tag{2.8}$$

(2) 通常线束中四直线交比的三角函数表示

设通常线束 $S(p)$ 中四直线 $p_i$ 与 $x$ 轴正向的夹角为 $\alpha_i$ $(i=1,2,3,4)$. 则 $k_i=\tan\alpha_i$. 代入 (2.8) 式，有

$$\begin{aligned}(p_1p_2, p_3p_4) &= \frac{(\tan\alpha_1-\tan\alpha_3)(\tan\alpha_2-\tan\alpha_4)}{(\tan\alpha_2-\tan\alpha_3)(\tan\alpha_1-\tan\alpha_4)}\\ &= \frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_4-\alpha_2)}{\sin(\alpha_3-\alpha_2)\sin(\alpha_4-\alpha_1)}\\ &= \frac{\sin(p_1p_3)\sin(p_2p_4)}{\sin(p_2p_3)\sin(p_1p_4)},\end{aligned}$$

其中， $(p_ip_j)$ 表示自直线 $p_i$ 到直线 $p_j$ 的角.

**定理 2.9** 设 $p_1, p_2, p_3, p_4$ 为欧氏平面上通常线束 $S(p)$ 中的四直线. 则

$$(p_1p_2, p_3p_4)=\frac{\sin(p_1p_3)\sin(p_2p_4)}{\sin(p_2p_3)\sin(p_1p_4)}. \tag{2.9}$$

**推论 2.6** 对于通常线束中的四直线 $p_i(i=1,2,3,4)$, 设 $p_3\perp p_4$. 则 $p_3, p_4$ 平分 $p_1, p_2$ 所成的一对角 $\Longleftrightarrow (p_1p_2, p_3p_4)=-1$.

4. 四直线交比的计算

一般地，若已知平面上四直线的坐标求其交比，则首先验证这四直线是否共点，然后以其中二直线为基线参数表示另外二直线，即可利用定义 2.3 求出交比. 特别地，我们可以任取一直线截此四直线得四个截点 (一般可取特殊直线，使得截点坐标简单), 求出这四点的交比.

**例 2.4** 设 $A, B, C, D$ 为圆上四定点， $P$ 为圆上任意一点.

求证： $P(AB, CD)^{1)}=$ 常数.

**证明** 如图 2.3, 设 $P, P'$ 为点 $P$ 的任意两个不同的位置. 利用同弧上的圆周角相等和四直线交比的三角函数表示，立刻可得结论.

与点列中四点交比的讨论完全对偶，我们有下列定理

**定理 2.10** 设 $p_i\in S(p)$ $(i=1,2,3,4)$, 并已知

$$(p_1p_2, p_3p_4)=k \qquad (k\neq 0,1,\infty)$$

1) 为书写简便计，我们用记号 $P(AB, CD)$ 表示 $(PA, PB; PC, PD)$.

和其中三直线的坐标. 则第四直线的坐标可据此惟一确定.

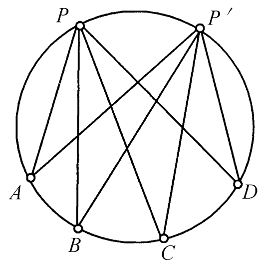



图 2.3

**例 2.5** 已知直线 $l_1, l_2, l_4$ 的坐标依次为 $a=[3,1,1], b=[7,5,1], d=[9,7,1]$, 且 $(l_1l_2, l_3l_4)=-1$. 求 $l_3$ 的方程.

**解** $l_4$ 的坐标 $d$ 可以写为 $l_1, l_2$ 的坐标的参数表示为 $d=a-3b$. 设 $l_3$ 的坐标为 $c=a+\lambda b$. 则因为

$$(l_1l_2, l_3l_4)=\frac{\lambda}{-3}=-1 \Longleftrightarrow \lambda=3.$$

所以 $l_3$ 的坐标为

$$c=[3,1,1]+3[7,5,1]=[24,16,4]\equiv[6,4,1].$$

$l_3$ 的方程为

$$6x_1+4x_2+x_3=0.$$

**推论 2.7** 设 $p_0, p_1, p_*$ 为线束 $S(p)$ 中取定的相异三直线. 则

$$(p_*p_0, p_1p)\longrightarrow x$$

为 $S(p)$ 与 $\overline{R}$ 之间的一个双射.

在此对应下, 显然当 $p=p_*$ 时, $x=\infty$, 当 $p=p_0$ 时, $x=0$, 当 $p=p_1$ 时, $x=1$. 由此我们可以利用交比定义线束的一种非齐次射影坐标. 显然, 这样定义的射影坐标与前面利用交比定义的点列上的射影坐标形式上完全一致. 从而可以得到一维基本形上统一的射影坐标, 其定义仅与射影不变量交比有关.

## 习 题 2.1

1. 设 $P_1(2,1,-1)$, $P_2(1,-1,1)$, $P_3(1,0,0)$, $P_4(1,5,-5)$. 证明: $P_1, P_2, P_3, P_4$ 四点共线并求 $(P_1P_2, P_3P_4)$.

2. 设 $P_1, P_2$ 分别是 $x$ 轴, $y$ 轴上的无穷远点, $P_3$ 是斜率为 1 的方向上的无穷远点, 且 $(P_1P_2, P_3P_4) = r$. 求 $P_4$ 的坐标.

3. 设 $1,2,3,4,5,6$ 是 6 个不同的有穷远共线点. 证明:

(1) $(12,34)(12,45)(12,53) = 1$;

(2) $(12,34)(12,56) = (12,36)(12,54)$;

(3) 如果 $(12,34) = (14,32)$, 则 $(13,24) = -1$.

4. 设 $A, B, P, Q, R$ 是相异的有穷远共线点, 而且 $(PA, QB) = (QR, AB) = -1$. 证明: $(PR, AB) = -2$.

5. 设直线 $l_1, l_2, l_3, l_4$ 的方程如下, 证明它们共点并求交比 $(l_1l_2, l_3l_4)$.

(1) $2x - y + 1 = 0,\ 3x + y - 2 = 0,\ 7x - y = 0,\ 5x - 1 = 0$;

(2) $x - y = 0,\ 2x + y = 0,\ x + y = 0,\ 3x - y = 0$;

(3) $x_1 - x_2 = 0,\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0,\ x_1 - x_3 = 0$.

6. 设直线 $l_1, l_3, l_4$ 的方程分别为

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 = 0,$$

而且 $(l_1l_2, l_3l_4) = -\dfrac{2}{3}$, 求 $l_2$ 的方程.

7. 证明: 两直线 $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ 调和分离两直线 $a_2x^2 + 2h_2xy + b_2y^2 = 0$ 的充要条件是 $a_1b_2 + a_2b_1 - 2h_1h_2 = 0$.

提示: 注意 $\dfrac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} = -1$ 与 $2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4)$ 等价并应用韦达定理.

8. 求两直线 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ 所成角的内外平分线方程.

9. 证明 "蝴蝶定理": 如图 2.4, 过一圆的弦 $AB$ 的中点 $O$ 任作其他二弦 $CE, DF$, 连 $EF, CD$ 交 $AB$ 于 $G, H$, 则 $GO = OH$.

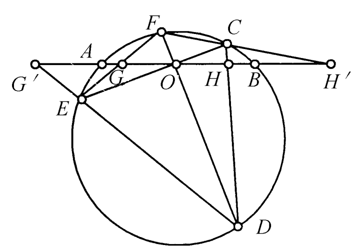



图 2.4

## §2.2 完全四点形与完全四线形的调和性

在完全四点形与完全四线形这一对对偶图形中, 包含有许多的调和共轭元素组, 因此在射影几何中有着基本的重要性. 本节专门研究其调和性.

### 一、完全四点形与完全四线形的调和性

**定理 2.11** 完全四点形的一对对边被过此二边交点的对边三点形的两边调和分离.

**定理 2.11′** 完全四线形的一对对顶被在此二对顶连线上的对顶三线形的顶点调和分离.

这两个定理显然是一对对偶命题, 因此只要证明其中一个即可. 但是, 作为演示, 我们先用代数法证明定理 2.11, 再用综合法证明定理 2.11′.

**证明定理 2.11** 如图 2.5, 对于完全四点形 $ABCD$, 只要证明 $(ss', tt') = -1$. 据 §2.1, 定理 2.6, 有

$$X(ss', tt') = (AB, PZ),$$

所以, 只要证 $(AB, PZ) = -1$.

因为 $A, B, C, D$ 中无三点共线, 据 §1.2, 例 1.4, 可适当选取其齐次坐标 $a, b, c, d$ 使得

$$a + b + c + d = 0,$$

即

$$a + b = -(c + d).$$

从而 $a + b$ 与 $c + d$ 是同一点的齐次坐标, 此点在 $AB$ 上, 又在 $CD$ 上, 即为 $Z = AB \times CD$. 于是 $Z$ 的齐次坐标为 $a + b$ 或 $c + d$.

同理, $X$ 的齐次坐标为 $a + d$ 或 $b + c$; $Y$ 的齐次坐标为 $a + c$ 或 $b + d$.

因为

$$a - b = (a + d) - (b + d),$$

此等式的左右两边分别表示着 $AB$ 上的点和 $XY$ 上的点的齐次坐标, 这说明坐标为 $a - b$ 的点在 $AB$ 上, 也在 $XY$ 上, 即为 $P$.

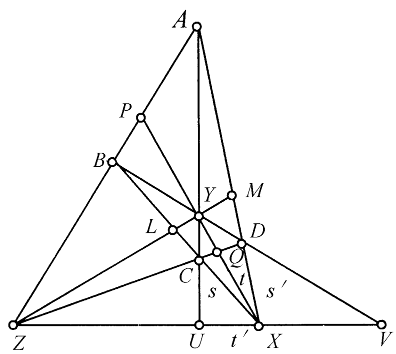



图 2.5

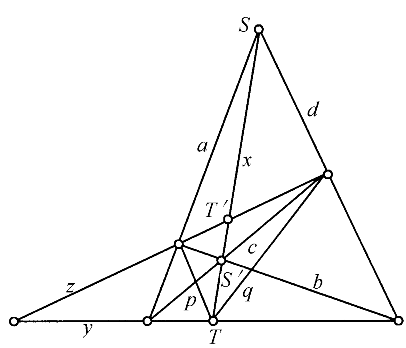



图 2.6

由于 $A, B, P, Z$ 的齐次坐标分别为 $a, b, a-b, a+b$, 所以

$$(AB, PZ) = -1 = (ss', tt').$$

同理可证过 $Y, Z$ 的四直线调和分离，证毕.

**证明定理 2.11′** 如图 2.6, 对于对顶线 $x$, 只要证 $(SS', TT') = -1$, 据 §2.1 推论 2.5, 只要证 $(ab, pz) = -1$. 因为

$$(ab, pz) = (y \times a, y \times b; y \times p, y \times z) = (cd, qz),$$

而

$$(cd, qz) = (SS', TT') = (ba, pz),$$

所以

$$(ab, pz) = (ba, pz) = \frac{1}{(ab, pz)},$$

即 $[(ab, pz)]^2 = 1$. 但是 $(ab, pz) \neq 1$, 所以 $(ab, pz) = -1$.

同理可证其他两条对顶线上的四点调和共轭. 证毕.

这两个定理是完全四点形与完全四线形的调和性的最基本的结论. 由此二定理，在图 2.5 和图 2.6 的每个中，都给出了三个调和共轭元素组.

据 §2.1 定理 2.7, 立刻可得如下推论.

**推论 2.8** 在完全四点形的对边三点形的每条边上有一个调和点组，其中一对为对边点，另一对为该边与过第三个对边点的一组对边的交点.

**推论 2.8′** 通过完全四线形的对顶三线形的每个顶点有一个调和线组, 其中一对为对顶线, 另一对为该顶点与在第三条对顶线上的一组对顶的连线.

由此二推论，在图 2.5 和 2.6 中，对每个图又各给出了三个调和共轭元素组.

**推论 2.9** 在完全四点形的每条边上有一个调和点组，其中一对为顶点; 另一对中一个为对边点，一个是该边与对边三点形的边的交点.

**推论 2.9′** 通过完全四线形的每个顶点有一个调和线组，其中一对为边; 另一对中一条为对顶线, 一条是该顶点与对顶三线形的顶点的连线.

由此二推论，在上述的图 2.5 和图 2.6 中又各给出了各 6 个调和共轭元素组.

上述定理和推论即为完全四点形和完全四线形的调和性的全部内容. 请读者对照图形，认真掌握.

## 二、调和性应用举例

1. 第四调和元素作图问题

**例 2.6** 如图 2.7, 已知直线 $l$ 上相异三点 $P_1, P_2, P_3$, 求作其第四调和点 $P_4$.

**解** 作法：(1) 过 $P_1, P_2$ 各作直线 $l_1, l_2$, 设 $l_1 \times l_2 = A$.

(2) 过 $P_3$ 作直线 $l_3$ 分别交 $l_1, l_2$ 于 $B, D$.

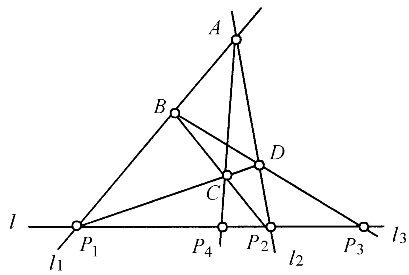



图 2.7

(3) 连 $P_1D, P_2B$ 交于 $C$, 连 $AC$ 交 $l$ 于 $P_4$. $P_4$ 即为所求第四调和点.

证明：由作法，$ABCD$ 为一个完全四点形，$P_1, P_2$ 为其两个对边点，$P_3, P_4$ 为第三双对边与 $P_1P_2$ 的交点，据推论 2.8, $(P_1P_2, P_3P_4) = -1$.

思考：试根据推论 2.9 来作图，并与上述相比较.

本例说明了下述事实：$(P_1P_2, P_3P_4) = -1 \iff$ 存在一个完全四点形以 $P_1, P_2$ 为两个对边点，使得 $P_3, P_4$ 在另一对对边上. 由此事实，我们可以利用完全四点形的调和性来给出调和点列、调和线束的综合定义.

2. 几何证明题

**例 2.7** 设 $TP, TQ$ 为 $\odot O$ 的两切线，$PR$ 为 $\odot O$ 的直径，$QN \perp RP$.

求证：$QN$ 被 $TR$ 平分.

**证明** 设 $TR \times QN = X$, 只要证明 $X$ 为 $QN$ 的中点.

(1) 由初等几何知识知，$QR, QP$ 为 $QN$ 与 $QT$ 所成角的内外平分线. 因此，设 $TQ \times PR = S$, 则 $Q(SN, RP) = -1$, 所以，$(SN, RP) = -1, T(SN, RP) = -1$.

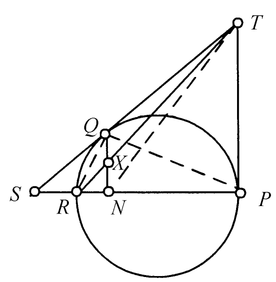



图 2.8

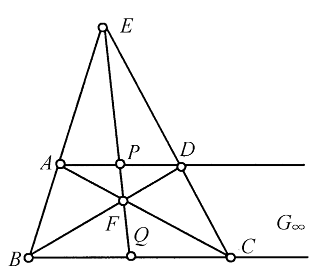



图 2.9

(2) 以直线 $QN$ 截 $T(S,N,R,P)$, 设 $QN\times TP=Y_\infty$, 则

$$(QN,XY_\infty)=T(SN,RP)=-1.$$

所以 $X$ 为 $QN$ 的中点.

**例 2.8** 证明：梯形两腰延长线的交点与对角线交点的连线平分上下底.

**证明** 如图 2.9, $ABCD$ 为梯形， $E$ 为腰 $AB$ 与 $CD$ 的交点， $F$ 为对角线的交点， $EF$ 交 $AD$, $BC$ 于 $P,Q$. 我们来证明 $P,Q$ 分别是 $AD$ 和 $BC$ 的中点.

考察完全四点形 $EAFD$, 设 $AD\times BC=G_\infty$. 据推论 2.8, 我们有 $(BC,QG_\infty)=-1$, 所以 $Q$ 为 $BC$ 的中点.

又据推论 2.9, $(AD,PG_\infty)=-1$, 所以 $P$ 为 $AD$ 的中点.

**例 2.9** 设 $X$ 为 $\triangle ABC$ 的高线 $AD$ 上一点， $BX$, $CX$ 分别交对边于 $Y,Z$. 求证： $AD$ 平分 $\angle YDZ$.

**证明** 设 $DY$ 交 $CX$ 于 $P$. 考察完全四点形 $CDXY$, $A,B,P$ 为其对边点. 据推论 2.9, $(CX,PZ)=-1$, 即 $D(CX,PZ)=-1$. 但是 $DX\perp DC$, 故 $DX$(即 $AD$), $DC$ 平分 $DP$, $DZ$ 所成的一对角.

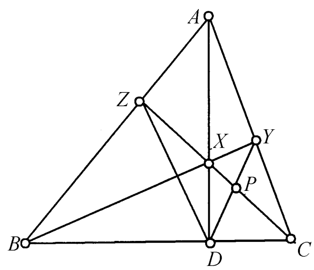



图 2.10

## 习 题 2.2

1. 设 $XYZ$ 是完全四点形 $ABCD$ 的对边三点形， $XZ$ 分别交 $AC$, $BD$ 于 $L,M$(如图 2.11). 不用 Desargues 定理证明： $YZ$, $BL$, $CM$ 共点.

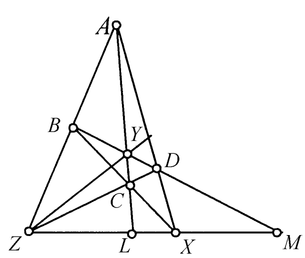



图 2.11

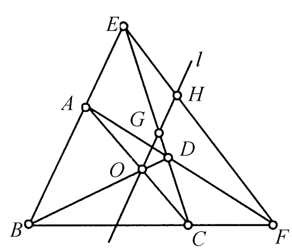



图 2.12

2. 设 $ABCD$ 为四边形， $AB \times CD = E, AD \times BC = F, AC \times BD = O$. 过 $O$ 作 $l /\!/ AB$ 交 $CD, EF$ 于 $G, H$(如图 2.12). 求证： $OG = GH$.

3. 设 $A, B, C$ 是完全四线形的三个共线的顶点，点偶 $A, B$ 与 $M, C$ 调和共轭. 求证：通过 $A, B$ 的对顶线的交点在 $M$ 与 $C$ 的对顶点的连线上.

4. 写出第 3 题的对偶命题.

5. 设 $XYZ$ 是完全四点形 $ABCD$ 的对边三点形， $P$ 是平面上的动点. 直线 $l$ 经过点 $X$，直线偶 $l, XP$ 与过 $X$ 的两边调和共轭；类似地定义分别经过点 $Y, Z$ 的直线 $m, n$. 证明：三直线 $l, m, n$ 共点.

6. 设有三点形 $P_1P_2P_3$, $Q_1, Q_2, Q_3$ 为共线三点分别位于三边上. 又 $(R_1Q_1,\ P_2P_3) = -1$, $(R_2Q_2, P_3P_1) = -1$, $(R_3Q_3, P_1P_2) = -1$. 求证： $P_1R_1$, $P_2R_2$, $P_3R_3$ 共点 (如图 2.13).

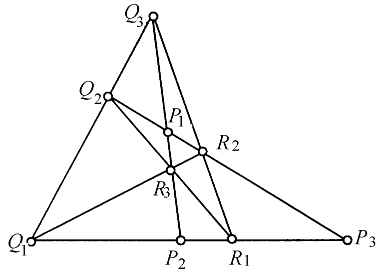



图 2.13

7. 设给定线段 $AB$ 的中点 $C$ 以及不在直线 $AB$ 上的一点 $M$. 试仅用直尺求作过 $M$ 且平行于 $AB$ 的直线.

## §2.3　一维基本形的射影对应

本节给出一维透视对应和射影对应的定义，并导出射影对应的代数定义.

### 一、透视对应

**定义 2.4**　下列对应称为一维基本形之间的 **透视对应**.

(1)　一个点列与一个线束之间的一宗对应称为透视对应，如果其对应元素是关联的. 如图 2.14, 记作

$$s(A, B, C, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} S(a, b, c, \cdots).$$

(2)　两个点列之间的一宗对应称为透视对应，如果其对应点的连线共点. 如图 2.15, 记作

$$s(A, B, C, \cdots) \overset{(S)}{\overline{\overline{\wedge}}} s'(A', B', C', \cdots).$$

并称 $S$ 为 **透视中心**.

(3) 两个线束之间的一宗对应称为透视对应，如果其对应直线的交点共线. 如图 2.16, 记作

$$S(a,b,c,\cdots) \overset{(s)}{\overline{\overline{\wedge}}} S'(a',b',c',\cdots).$$

并称 $s$ 为 **透视轴**.

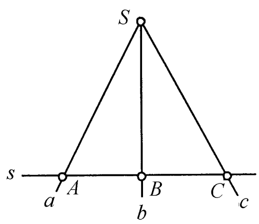


图 2.14

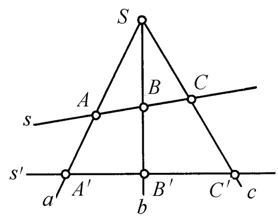


图 2.15

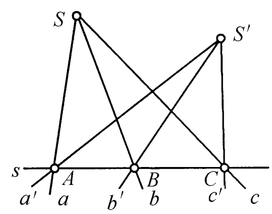


图 2.16

由定义 2.4 可知，透视对应是双射，且保持任意四对对应元素的交比不变. 但是透视对应不是一维基本形之间的等价关系，因为“传递性”显然不满足，换句话说，两个透视对应的积不一定还是透视对应.

## 二、射影对应

1. Poncelet 定义

**定义 2.5**(Poncelet) 设 $[\pi], [\pi']$ 为两个一维基本形. 若存在 $n$ 个一维基本形 $[\pi_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$[\pi] \overline{\overline{\wedge}} [\pi_1] \overline{\overline{\wedge}} \cdots \overline{\overline{\wedge}} [\pi_n] \overline{\overline{\wedge}} [\pi'],$$

则称由此决定的 $[\pi]$ 与 $[\pi']$ 之间的对应为 **射影对应**, 记作 $[\pi] \overline{\wedge} [\pi']$.

由定义 2.5, 一个射影对应就是有限次透视对应的积，即为连续有限个透视对应构成的链. 从定义不难看出下列性质成立.

**推论 2.10** (1) 透视对应是射影对应，反之不一定成立;

(2) 射影对应是一维基本形集合上的一个等价关系;

(3) 射影对应是双射，且保持任意四对对应元素的交比不变.

定义 2.5 具有很强的几何直观性，但是不利于理论分析，我们继续讨论其他的综合定义方法.

2. Steiner 定义

**定义 2.6**(Steiner) 设 $\varphi:[\pi]\to[\pi']$ 为两个一维基本形之间的一个双射. 若 $\varphi$ 使得任何四对对应元素的交比相等，则称 $\varphi$ 为 $[\pi]$ 到 $[\pi']$ 的一个 **射影对应**, 记作

$[\pi] \barwedge [\pi']$.

**定理 2.12** Poncelet 定义 $\Longleftrightarrow$ Steiner 定义.

**证明** “$\Longrightarrow$” 显然.

“$\Longleftarrow$” 用同一法. 设 $\varphi:[\pi]\to[\pi']$ 为满足 Steiner 定义的射影对应. 我们只要证明 $\varphi$ 可以表示为有限次透视对应的积.

如图 2.17, 设 $P_0, P_1, P_2$ 为点列 $l(P)$ 上相异三点, $P$ 为 $l(P)$ 上任意一点, 且 $\varphi(P_i)=P_i'$ $(i=0,1,2)$, $\varphi(P)=P'$. 则有

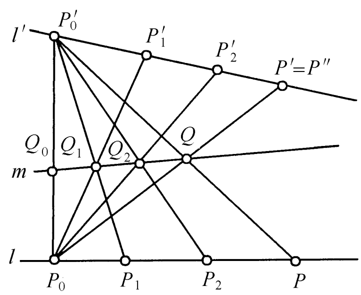



图 2.17

$$(P_0P_1,P_2P)=(P_0'P_1',P_2'P').$$

连结 $P_0'P_1, P_0'P_2; P_0P_1', P_0P_2'$, 设 $P_0'P_1\times P_0P_1'=Q_1$, $P_0'P_2\times P_0P_2'=Q_2$. 连 $Q_1Q_2=m$, 连 $P_0'P$ 交 $m$ 于 $Q$, 连 $P_0Q$ 交 $l'$ 于 $P''$, 并设 $P_0P_0'$ 交 $m$ 于 $Q_0$. 则

$$l(P_0,P_1,P_2,P)\overset{(P_0')}{\overline{\overline{\wedge}}}\ m(Q_0,Q_1,Q_2,Q)\overset{(P_0)}{\overline{\overline{\wedge}}}\ l'(P_0',P_1',P_2',P''),$$

所以, 据 Poncelet 定义有

$$l(P_0P_1,P_2P)\barwedge l'(P_0'P_1',P_2'P''),$$

所以

$$(P_0P_1,P_2P)=(P_0'P_1',P_2'P'')=(P_0'P_1',P_2'P').$$

从而有

$$P'=P''.$$

即对任意的 $P\in l(P)$, 均有 $P'=\varphi(P)$ 可以通过两次透视对应得到, 即 $\varphi$ 满足 Poncelet 定义.

利用对偶原则可以证明两个线束的情况, 对于一个点列与一个线束的情况, 可以先以一条直线截已知线束, 使之归结为两个点列的情况, 证毕.

定理 2.12 的证明过程为我们提供了一个作图方法，称为 Steiner 作图法. 已知两个点列 $l(P)\barwedge l'(P')$, 以及其相异的三对对应元素 $P_i$ 和 $P_i'$, 对于点列 $l(P)$ 中任一元素 $P$, 求作其在点列 $l'(P')$ 上的对应元素 $P'$. 同样，此作图法可以延伸到求作两个线束或一线束一点列之间的射影对应元素.

定理 2.12 的证明过程还说明，两个同类一维基本形之间的任一个射影对应，必可分解为不多于两个透视对应的积. 任意两个一维基本形之间的射影对应必可分解为不多于三个透视对应的积.

**定理 2.13** 已知相异的三对对应元素，可以惟一确定两个一维基本形之间的一个射影对应.

3. 射影对应成为透视对应的条件

我们看到，两个点列间的射影对应若是透视对应，则其对应点的连线共点 (于透视中心)；两个线束间的射影对应若是透视对应, 则其对应直线的交点必共线 (于透视轴). 这些性质为证明共点线和共线点问题提供了一种有效方法.

**定理 2.14** 两个同类一维基本形之间的射影对应成为透视对应 $\Longleftrightarrow$ 公共元素自对应.

**证明** 见本节习题.

在实际应用定理 2.14 时，我们一般先证明两个同类一维基本形之间的某个对应是射影对应，然后

(1) 证诸线共点，只要证这些直线是某两个成透视对应的点列的对应点的连线.

(2) 证诸点共线，只要证这些点是某两个成透视对应的线束的对应直线的交点.

**例 2.10**(Pappus 定理) 在共面相异二直线 $l_i$ 上各取定相异三点 $A_i, B_i, C_i (i = 1, 2)$. 设

$$B_1C_2 \times B_2C_1 = L,$$

$$C_1A_2 \times C_2A_1 = M,$$

$$A_1B_2 \times A_2B_1 = N.$$

求证： $L, M, N$ 共线.

**证明** 如图 2.18, 有

$$(B_1, D, N, A_2) \overset{(A_1)}{\overline{\overline{\wedge}}} (O, C_2, B_2, A_2) \overset{(C_1)}{\overline{\overline{\wedge}}} (B_1, C_2, L, E),$$

所以

$$(B_1, D, N, A_2) \barwedge (B_1, C_2, L, E).$$

而在这个射影对应中，二点列的底的交点 $B_1$ 自对应，由定理 2.14, 有

$$(B_1, D, N, A_2)\overline{\overline{\wedge}}(B_1, C_2, L, E),$$

因此， $DC_2, NL, A_2E$ 三直线共点，即 $L, M, N$ 三点共线.

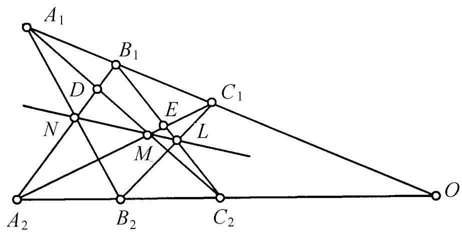



图 2.18

### 三、射影对应的代数定义

我们给出关于点列之间射影对应的代数定义. 事实上，利用齐次坐标，从纯代数的观点看，这个定义也完全适用于两个线束之间或者一点列与一线束之间的一维射影对应.

**定义 2.7** 设在两个点列上均给定了齐次坐标, 并且 $(x_1, x_2), (x_1', x_2')$ 分别表示这二点列上的对应点的齐次坐标. 称 **非奇异线性对应**

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \rho \neq 0 \tag{2.10}$$

为这两个点列间的一个 **射影对应**.

**定理 2.15** Steiner 定义 $\Longleftrightarrow$ 代数定义.

**证明** “ $\Longrightarrow$ ” 设在两个点列 $l(P)$ 和 $l'(P')$ 之间由相异的三对对应点 $P_i \to P_i'(i = 1, 2, 3)$ 确定了一个射影对应. 设 $P \to P'$ 为其任一对对应点. 则据 Steiner 定义有

$$(P_1P_2, P_3P) = (P_1'P_2', P_3'P').$$

在 $l, l'$ 上分别引进一维齐次坐标. 设 $P_1, P_2, P_3, P$ 的齐次坐标依次为

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1 + \lambda_0 b_1, a_2 + \lambda_0 b_2), (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2),$$

且 $P_1', P_2', P_3', P'$ 的齐次坐标分别为

$$(a_1', a_2'), (b_1', b_2'), (a_1' + \lambda_0' b_1', a_2' + \lambda_0' b_2'), (a_1' + \lambda' b_1', a_2' + \lambda' b_2').$$

于是

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\lambda_0'}{\lambda'}. \tag{*}$$

如果用 $(x_1, x_2), (x_1', x_2')$ 分别表示点 $P, P'$ 的齐次坐标，则

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda b_1} = \frac{x_2}{a_2 + \lambda b_2},$$

所以

$$\lambda = \frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{-b_2 x_1 + b_1 x_2}.$$

同理可得

$$\lambda' = \frac{a_2' x_1' - a_1' x_2'}{-b_2' x_1' + b_1' x_2'}.$$

将 $\lambda, \lambda'$ 代入 (*), 有

$$\frac{\lambda_0(-b_2 x_1 + b_1 x_2)}{a_2 x_1 - a_1 x_2} = \frac{\lambda_0'(-b_2' x_1' + b_1' x_2')}{a_2' x_1' - a_1' x_2'},$$

所以

$$\begin{cases} \lambda_0(-b_2 x_1 + b_1 x_2) = \rho\lambda_0'(-b_2' x_1' + b_1' x_2'), \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 = \rho(a_2' x_1' - a_1' x_2'), \end{cases}$$

其中 $\rho$ 为比例常数.

由上式解出 $x_1', x_2'$ 可得

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ \rho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \end{cases}$$

其中 $\rho \neq 0, a_{ij}$ 均为常数，而且必有行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

否则， $l$ 上的所有点均对应于 $l'$ 上的一个定点，与符合 Steiner 定义的射影对应是双射矛盾.

“ $\Longleftarrow$ ” 设有非奇异线性对应 (2.10). 则对于 $l$ 上的一个确定的点 $P(x_1, x_2)$, 由 (2.10) 必可确定两个不全为零的数 $(\rho x_1', \rho x_2')$. 因此， $P$ 在 $l'$ 上有惟一确定的像点.

由于 $D \neq 0$, 由 (2.10) 可以求出其逆对应式为

$$\begin{cases} \sigma x_1 = A_{11}x_1' + A_{21}x_2', \\ \sigma x_2 = A_{12}x_1' + A_{22}x_2', \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $\sigma = \dfrac{D}{\rho}$, $A_{ij}$ 是 $a_{ij}$ 在 $D$ 中的代数余子式. 从而, $l'$ 上任一点在 $l$ 上有惟一原像. 这说明 (2.10) 式确定了点列 $l(P)$ 与 $l'(P')$ 之间的一个双射.

以下证明 (2.10) 式保持任意四对对应点的交比不变. 设 $P_1, P_2, P_3, P$ 是点列 $l(P)$ 上四点, 且 $P_1 \neq P_2$. 在 (2.10) 的对应下它们对应于点列 $l'(P')$ 中四点 $P_1', P_2', P_3', P'$, 于是 $P_1' \neq P_2'$. 我们设上述两个四点组中点的齐次坐标依次为

$$P_1(a_1, a_2), P_2(b_1, b_2), P_3(a_1 + \lambda_0 b_1, a_2 + \lambda_0 b_2), P(a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2),$$

$$P_1'(a_1', a_2'), P_2'(b_1', b_2'), P_3'(a_1' + \lambda_0' b_1', a_2' + \lambda_0' b_2'), P'(a_1' + \lambda' b_1', a_2' + \lambda' b_2').$$

考察前三对对应点的第一坐标分量，有

$$\rho_1 a_1' = a_{11}a_1 + a_{12}a_2,$$

$$\rho_2 b_1' = a_{11}b_1 + a_{12}b_2,$$

$$\rho_3(a_1' + \lambda_0' b_1') = a_{11}(a_1 + \lambda_0 b_1) + a_{12}(a_2 + \lambda_0 b_2).$$

将前二式代入第三式，整理得

$$(\rho_3 - \rho_1)a_1' = (\lambda_0\rho_2 - \lambda_0'\rho_3)b_1',$$

再由前三对对应点的第二坐标分量同样可得

$$(\rho_3 - \rho_1)a_2' = (\lambda_0\rho_2 - \lambda_0'\rho_3)b_2'.$$

由于 $P_1'$ 与 $P_2'$ 相异，有

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此

$$\rho_3 - \rho_1 = 0, \qquad \lambda_0\rho_2 - \lambda_0'\rho_3 = 0.$$

于是有

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

再考察第一、二、四这三对对应点，同理可得

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

于是得到

$$(P_1P_2,P_3P)=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\lambda_0'}{\lambda'}=(P_1'P_2',P_3'P').$$

综上，非奇异线性对应 (2.10) 满足 Steiner 定义．证毕.

在不涉及无穷远元素时，我们也常将 (2.10) 式写成非齐次形式

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}},\qquad |a_{ij}|\neq 0, \tag{2.12}$$

或

$$axx'+bx+cx'+d=0,\qquad ad-bc\neq 0. \tag*{(2.12)$'$}$$

**例 2.11** 求射影对应式，使 $l$ 上坐标为 $2,4$ 的点以及无穷远点分别对应于 $l'$ 上的坐标为 $-1,1$ 的点以及无穷远点.

**解** 将已知对应点的坐标化为齐次，依题意有

$$\begin{array}{ccc}(x_1,x_2) & & (x_1',x_2')\\ (2,1) & \longleftrightarrow & (-1,1)\\ (4,1) & \longleftrightarrow & (1,1)\\ (1,0) & \longleftrightarrow & (1,0)\end{array}$$

设所求射影对应式为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\end{cases} \tag{2.10}$$

只要求出 $a_{11}:a_{12}:a_{21}:a_{22}$ 即可.

把上述三对对应点的坐标依次代入 (2.10), 得

$$(2,1)\longleftrightarrow(-1,1)\qquad (4,1)\longleftrightarrow(1,1)\qquad (1,0)\longleftrightarrow(1,0)$$

$$\begin{cases}-\rho_1=2a_{11}+a_{12}\\ \rho_1=2a_{21}+a_{22}\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_2=4a_{11}+a_{12}\\ \rho_2=4a_{21}+a_{22}\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_3=a_{11}\\ 0=a_{21}\end{cases}$$

从此得 $a_{21}=0$, 代入其他各式可得

$$a_{11}:a_{12}:a_{21}:a_{22}=1:-3:0:1.$$

所求对应式为

$$\begin{cases}\rho x_1' = x_1-3x_2,\\ \rho x_2' = x_2,\end{cases}$$

化为非齐次，即 $x'=x-3$.

## 习　题　2.3

1. 求射影对应式，使直线 $l$ 上坐标为 $0,1,2$ 的三点顺次对应于直线 $l'$ 上坐标为 $-1,0,-2$ 的三点.

2. 对于第 1 题，求每条直线上无穷远点的对应点.

3. 求射影对应式，使直线 $l$ 上坐标为 $1,2,3$ 的三点顺次对应于直线 $l'$ 上的三点，其坐标分别为

(1)　4,3,2;　　(2)　$-1,-2,-3$;　　(3)　1,2,3.

4. 已知点列 $l(P)$ 与 $l'(P')$ 上的三对对应点 $A(3,1),B(0,5),C\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)\longleftrightarrow A'(2,-3)$, $B'(6,-7),C'(1,4)$ 由此是否可惟一确定 $l$ 到 $l'$ 的一个射影对应？为什么？

5. 试对于点列的情况证明定理 2.14.

6. 如果三角形 $ABC$ 的边 $BC,CA,AB$ 分别通过在同一直线上的三点 $P,Q,R$, 又顶点 $B,C$ 各在一条定直线上. 求证：顶点 $A$ 也在一条定直线上.

7. 设有一个变动的三点形 $ABC$ 的三边 $BC,CA,AB$ 分别通过三个定点 $X,Y,Z$, 且顶点 $B,C$ 分别在两条定直线 $m,l$ 上 (图 2.19).

证明：线束 $Y(A)\barwedge$ 线束 $Z(A)$.

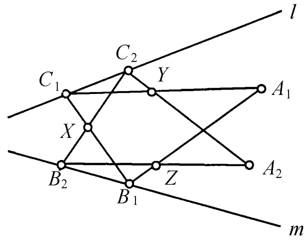



图 2.19

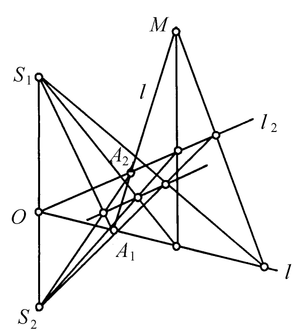



图 2.20

8. 设两定直线 $l_1,l_2$ 交于点 $O$, 两定点 $S_1,S_2$ 与 $O$ 共线，动直线 $l$ 通过另一定点 $M$, 分别交 $l_1,l_2$ 于点 $A_1,A_2$(图 2.20).

证明：直线 $S_1A_1, S_2A_2$ 的交点轨迹为一条直线．讨论：此直线在什么条件下经过点 $O$?

## §2.4 一维射影变换

在 §2.3 的基础上，本节专门研究一维射影变换．

### 一、一维射影变换

1. 定义

本书中，对应是指两个集合的元素之间的关系，而变换则是指同一个集合的元素之间的关系．

**定义 2.8** 一个一维基本形到其自身的射影对应称为 **一维射影变换**．

此时可把一个一维基本形看作两个重叠的一维基本形，即两个同底的点列 $l(P)\barwedge l(P')$ 或者两个同束心的线束 $S(p)\barwedge S(p')$．为了说清楚元素与其像元素，我们常常把同一个一维基本形看作两个一维基本形，一个是变换前的，叫做第一基本形；一个是经射影变换作用之后的，叫做第二基本形．这样，当我们研究一个一维基本形上的射影变换时，这个基本形中的每一个元素就都有着双重身份，既是第一基本形的元素，又是第二基本形的元素．

显然，射影变换是特殊的射影对应，所有关于射影对应讨论的结果都适用于射影变换．

2. 一维射影变换的参数表示

一维射影变换的代数表示式就是 (2.10)，此时，其中对应点的坐标是在同一坐标系下取得的．我们来给出另一种重要的表示方法，即参数表示．

**定义 2.9** 形如 $axx'+bx+cx'+d=0\ (ad-bc\neq 0)$ 的方程称为关于 $x, x'$ 的**双线性方程**．

显然，一维射影变换的非齐次坐标表达式为一个双线性方程．

**定理 2.16** 一维基本形上的一个变换为射影变换 $\Longleftrightarrow$ 其对应元素的参数 $\lambda, \lambda'$ 满足一个双线性方程

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0\quad(ad-bc\neq 0).\tag{2.13}$$

**证明** 因为点列和线束的非齐次参数表示具有完全相同的代数结构，所以在本定理的证明中无需特别指明所论一维基本形是点列还是线束．

“ $\Longrightarrow$ ” 设两个重叠的一维基本形 $(P)\barwedge(P')$．取定基元素 $A, B$，则对任意的 $P\in(P)$，有 $P=A+\lambda B$，$\lambda\in\overline{R}$．设此射影对应由

$$A+\lambda_iB\longleftrightarrow A+\lambda_i'B\quad(i=1,2,3,\ \lambda_i,\lambda_i'\text{各不相同})$$

决定，而 $A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 为任一对对应元素．据 Steiner 定义，有

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda)}=\frac{(\lambda_1'-\lambda_3')(\lambda_2'-\lambda')}{(\lambda_2'-\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda')}.$$

由此可以推出 $\lambda$ 与 $\lambda'$ 之间的关系必定形如 (2.13)．其中必有 $ad-bc\neq 0$, 否则由 $ad-bc=0$ 可以推出 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=t$, 从而 $b=at, d=ct$ 代入 (2.13), 对任意的 $\lambda\in\overline{R}$, 总有 $\lambda'=-t$, 与射影对应为双射矛盾．

"$\Longleftarrow$" 由 (2.13) 式成立，可直接验证其满足 Steiner 定义．即 (2.13) 所决定的变换是双射，且保持任意四对对应元素的交比不变．证明从略．

我们把 (2.13) 称为一维射影变换的 **参数表示**. 对于一维射影对应，利用参数表示常常会比用代数表示式 (2.10) 更有其方便之处．

双线性方程 (2.13) 可以取作一维射影变换的定义，并且，从代数的角度说，这个定义可以不限于点列，对线束也成立．

在定理 2.16 的证明过程中，若舍弃重叠条件，结论仍然成立．故 (2.13) 也可以作为一般的一维射影对应的定义，即使是两个不同类的一维基本形也同样适用．

## 二、一维射影变换的分类

1. 不变元素

所谓 **不变元素**, 是指在一个变换下保持不变的元素．对不变元素的研究，历来是各种几何学的重要内容．

**定理 2.17** 在复数范围内，任一个一维射影变换至少有一个不变元素．非恒同的一维射影变换具有不多于两个的相异不变元素．

**证明** 在 (2.13) 中，令 $\lambda=\lambda'$, 得到

$$a\lambda^2+(b+c)\lambda+d=0\quad(ad-bc\neq 0). \tag{2.14}$$

这就是求一维射影变换的不变元参数的方程, 在复数范围内, 这个方程显然有至多两个根，每一个对应着一个不变元素．

2. 一维射影变换的分类

考察 (2.14), 其有根情况为

(1) 两个相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2$, 对应着射影变换 (2.13) 有两个相异的实不变元素；

(2) 两个相等的实根 $\lambda_1$, 射影变换有两个重合的实不变元素，或者说只有惟一不变元素；

(3) 两个共轭虚根 $\lambda_1,\lambda_2$, 射影变换有两个共轭的虚不变元素．

**定义 2.10**　设 $\varphi$ 为一维射影变换. 如果 $\varphi$ 有两个相异的实不变元素，则称之为一个 **双曲型射影变换**; 如果 $\varphi$ 有两个重合的实不变元素，则称之为一个 **抛物型射影变换**; 如果 $\varphi$ 有两个共轭的虚不变元素，则称之为一个 **椭圆型射影变换**.

3. 不变元素的性质

关于双曲型、椭圆型射影变换和抛物型射影变换，分别有下列两个结论成立.

**定理 2.18**　若一个一维射影变换具有两个相异的不变元素，则任一对相异的对应元素与两个不变元素所成的交比为常数，称为此射影变换的 **特征不变量**.

**证明**　设 $X, Y$ 为一维基本形射影变换的两个相异的不变元素， $P, P'$ 为任一对对应元素 (非不变元素). 只要证 $(PP', XY) =$ 常数.

设 $X, Y, P, P'$ 的坐标依次为 $x, y, x+y, x+\mu y$, 则这四点的参数分别为 $0, \infty, 1, \mu$. 代入 (2.13) 式并计算可求出 $\mu = -\frac{b}{c}$, 故

$$(PP', XY) = -\frac{c}{b} = \text{常数}.$$

所以一维射影变换 (2.13) 的特征不变量为 $-c/b$.

**定理 2.19**　设一维抛物型射影变换的不变元素参数为 $\alpha$, 而 $\lambda, \lambda'$ 为任一对相异对应元素的参数，则

$$\frac{1}{\lambda-\alpha} - \frac{1}{\lambda'-\alpha} = k(\text{常数}).$$

**证明**　欲证之式可以变形为

$$\lambda\lambda' - (\alpha - \frac{1}{k})\lambda - (\alpha + \frac{1}{k})\lambda' + \alpha^2 = 0, \tag{$*$}$$

因为 $\alpha$ 为方程

$$a\lambda^2 + (b+c)\lambda + d = 0$$

的二重根，也即

$$\lambda^2 + \frac{b+c}{a}\lambda + \frac{d}{a} = 0$$

的二重根. 因而

$$\alpha^2 = \frac{d}{a}, \qquad 2\alpha = -\frac{b+c}{a}$$

代入双线性方程

$$\lambda\lambda' + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\lambda' + \frac{d}{a} = 0,$$

得

$$\lambda\lambda' - (2\alpha + \frac{c}{a})\lambda + \frac{c}{a}\lambda' + \alpha^2 = 0.$$

在此式中令

$$k = -\frac{a}{c+a\alpha}(= \text{常数}),$$

化简即得 $(*)$ 式.

**例 2.12** 设 $A, B, C$ 是相异的共线点，在射影变换 $(P)\barwedge(P')$ 中， $A, B, C$ 依次对应于 $B, C, A$. 求证：此射影变换为椭圆型的.

**证明** 设 $A, B, C$ 的坐标依次为 $\alpha, \alpha+\gamma, \gamma$, 则若以 $A, C$ 为基点作参数表示时, 可以求出其参数 $\lambda$ 各为

$$\begin{aligned} A:&\quad \alpha+0\gamma &\Longrightarrow&\quad \lambda=0,\\ B:&\quad \alpha+\gamma &\Longrightarrow&\quad \lambda=1,\\ C:&\quad 0\alpha+\gamma &\Longrightarrow&\quad \lambda=\infty. \end{aligned}$$

根据题意，有

$$\begin{array}{cccccc} & \lambda & \longleftrightarrow & \lambda' & \\ A & 0 & & 1 & B\\ B & 1 & & \infty & C\\ C & \infty & & 0 & A \end{array}$$

设 $(P)\barwedge(P')$ 的变换式为

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0 \Rightarrow \lambda'=-\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}. \tag{$*$}$$

将上述三对参数值依次代入 $(*)$ 得

$$\begin{aligned} A\longleftrightarrow B:&\qquad 1=-\frac{d}{c}\Longrightarrow c:d=1:-1,\\ B\longleftrightarrow C:&\qquad 0=-\frac{a+c}{b+d}\Longrightarrow a:c=1:-1,\\ C\longleftrightarrow A:&\qquad 0=-\frac{b}{a}\Longrightarrow b=0, \end{aligned}$$

所以

$$a:b:c:d=1:0:-1:1.$$

所求变换式的双线性方程为

$$\lambda\lambda'-\lambda'+1=0.$$

显然它有两个虚的不变元素，为椭圆型的.

## 习 题 2.4

1. 设以 $0, 2, -2$ 为参数的点依次对应于以 $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -2$ 为参数的点，求射影变换式.

2. 求下列一维射影变换的不变元素参数.

(1)　$\lambda\lambda' - 6\lambda + \lambda' + 6 = 0$;

(2)　$\lambda\lambda' - 2\lambda + 1 = 0$;

(3)　$2\lambda + \lambda' + 1 = 0$.

3. 设 $A_1, A_2, A_3$ 为坐标三点形，$O(1,1,1)$, $A_2O$ 交 $A_1A_3$ 于 $A$, $P$ 是 $A_2A_3$ 上的动点，$PO$ 交 $A_1A_2$ 于 $Q$, $QA$ 交 $A_2A_3$ 于 $P'$. 如果 $P, P'$ 的齐次坐标分别为 $(0,\lambda,1)$, $(0,\lambda',1)$. 求射影变换 $(P)\overline{\wedge}(P')$ 的方程和不变元素.

4. 设 $A, B, C$ 是相异的共线点且有

$$(A,B,C,P,Q,R)\overline{\wedge}(B,C,A,Q,R,X).$$

求证：$X$ 与 $P$ 重合.

5. 设一维射影变换的两个相异不变元素的参数分别为 $1, -1$, 任一对对应元素与两个不变元素的交比为 2, 求射影变换式.

6. 如图 2.21, 设 $P, P'; Q, Q'$ 是点列 $l(P)$ 上射影变换的两对对应点，$E$ 是不变点，$V, V'$ 是过 $E$ 的直线上的任意两点，$PV \times P'V' = P''$, $QV \times Q'V' = Q''$. 求证：$P''Q''$ 与 $l$ 的交点是另一个不变点.

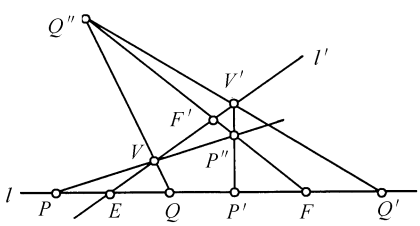



图 2.21

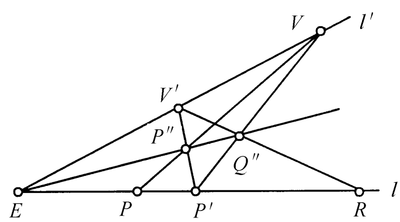



图 2.22

7. 设点列的射影变换是抛物型的，$E$ 为不变点，$P \longrightarrow P'$ 是一对对应点. 当把 $P'$ 看着第一点列的点时，在这个射影变换下有 $P' \longrightarrow R$(如图 2.22). 求证：$(EP', PR) = -1$.

8. 如图 2.23, 设 $A, B, C, D; A', B', C'$ 为直线 $l$ 上相异的点. 在射影变换

$$(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}(A',B',C',\cdots)$$

下，求作点 $D$ 的对应点.

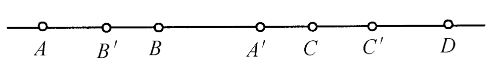



图 2.23

## §2.5　一维基本形的对合

一维基本形的对合是一维射影变换最有意思的特例，也被认为是一维射影几

何中最难懂的内容. 由 §2.4 知, 双曲型、椭圆型射影变换的两个不变元素与任一对相异的对应元素所成的交比为该射影变换的特征不变量, 而对合则是研究当这个特征不变量为 $-1$ 即调和比的情况.

## 一、对合的定义

1. 定义

为直观地引入对合的定义, 我们先研究下面的函数.

$$f:\ R \longrightarrow R\ \ (R\text{为实数集}),$$

$\forall x \in R, f:\ x \longmapsto -x$ (即通常写 $y = f(x) = -x$). 不难发现, 这个函数有如下的特性.

(1) $f$ 的定义域和值域都是 $R$, 且为单值的, 即 $f$ 为 $R$ 到 $R$ 的一个双射.

(2) $f^{-1}$ 存在, 且 $f^{-1} = f$. 从而 $\forall x \in R$, $f(x) = f^{-1}(x)$, 即每一个实数在 $f$ 与 $f^{-1}$ 下的像是相同的 (这个特性也可以表示为 $f^2 = I$, 其中 $I$ 表示恒同映射, 即连续两次作 $f$ 的结果为恒同).

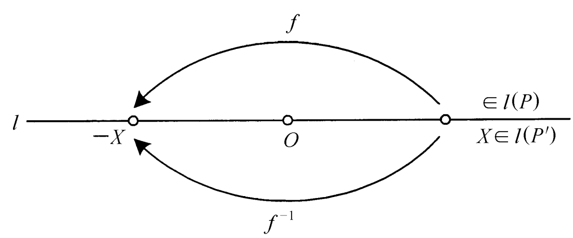



图 2.24

如果我们添加 $f(\infty) = \infty$ 将 $R$ 拓广为点列 $\overline{R}$, 则 $f$ 显然是以此直线为底的两个重叠的点列 $l(P)$ 和 $l(P')$ 之间的一个射影变换. 而 $f$ 的第 (2) 个性质就反映为:

(1) 把点 $X$ 看作是 $l(P)$ 的点, 则它的对应元素 $f(X) = X' \in l(P')$ 为 $X$ 的对称点.

(2) 把 $X$ 看作是 $l(P')$ 的点, 则其对应元素 $f^{-1}(X) = X' \in l(P)$ 仍为 $X$ 的对称点.

也就是说, 对于任意的点 $X$, 无论把它视为第一基本形 $l(P)$ 的元素还是把它视为第二基本形 $l(P')$ 的元素, 其对应元素为同一个点. 从此可引出对合的定义.

**定义 2.11** 两个成射影对应的重叠的一维基本形中, 若对于任意一个元素, 无论把它看作是属于第一或第二基本形的元素, 其对应元素相同, 则称这种非恒同的射影变换为一个 **对合**.

**定义 2.11′** 设 $f$ 为一维基本形 $[\pi]$ 上的一个非恒同的射影变换. 若对于任意的 $x \in [\pi]$, 都有 $f(x) = f^{-1}(x)$, 则称 $f$ 为 $[\pi]$ 上的一个 **对合**.

据定义 2.11, 对合是一类特殊的一维射影变换，对合一定不是恒同，对合具有一维射影变换的一切性质.

2. 代数表示

**定理 2.20** 两个重叠的一维基本形 $A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 上的一个变换为对合 $\Longleftrightarrow$ $f$ 的任一对对应元素的参数 $\lambda, \lambda'$ 满足

$$a\lambda\lambda' + b(\lambda+\lambda') + d = 0, \qquad ad - b^2 \neq 0. \tag{2.15}$$

证明从略.

(2.15) 式可作为对合的代数定义，易见此式中 $\lambda, \lambda'$ 的地位完全对等，恰是对合的特征.

## 二、确定对合的条件

1. 代数条件

由 (2.15) 式不难看出下面的定理成立.

**定理 2.21** 一维基本形上的一个对合可由已知其不重合的两对对应元素惟一确定.

**推论 2.11** 在同一对应下，一个一维基本形的三对对应元素 $P_i, P_i'$ $(i=1,2,3)$ 属于同一对合 $\Longleftrightarrow$ 其参数满足

$$\begin{vmatrix} p_1p_1' & p_1+p_1' & 1 \\ p_2p_2' & p_2+p_2' & 1 \\ p_3p_3' & p_3+p_3' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.16}$$

**证明** $P_i, P_i'$ 属于同一对合 $\Longleftrightarrow$ 其参数满足同一个方程 (2.15), 即

$$ap_ip_i' + b(p_i+p_i') + d = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

$\Longleftrightarrow$ 上述三式构成的齐次线性方程组对 $a, b, d$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ (2.16) 式成立.

**推论 2.12** 若已知一个一维基本形中两对不重合的对应元素的参数分别为 $p_i, p_i'$ $(i=1,2)$, 则由此确定此对合的方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda' & \lambda+\lambda' & 1 \\ p_1p_1' & p_1+p_1' & 1 \\ p_2p_2' & p_2+p_2' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.17}$$

**例 2.13** 已知一维基本形中两对对应元素的参数为 1 与 $\frac{1}{2}$； 0 与 2. 求由此决定的对合方程.

**解** 设任一对对应元素的参数为 $\lambda, \lambda'$, 则由 (2.17), 所求对合方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda\lambda' & \lambda+\lambda' & 1 \\ 1\times\dfrac{1}{2} & 1+\dfrac{1}{2} & 1 \\ 0\times 2 & 0+2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得

$$\lambda\lambda' + \lambda + \lambda' - 2 = 0.$$

2. 几何条件

设 $f$ 为一维基本形上的一个射影变换.

$$(a, b, c, \cdots)\overline{\wedge}(a', b', c', \cdots).$$

如果 $f$ 使得

$$(a, a', b, c, \cdots)\overline{\wedge}(a', a, b', c', \cdots),$$

换句话说， $a, a'$ 这一对对应元素在 $f$ 下满足对合条件, 此时我们称 $a, a'$ 这一对对应元素在 $f$ 下 **相互对应**.

**定理 2.22** 若一维基本形上一个非恒同的射影变换使得一对对应元素相互对应，则这个射影变换必为对合.

**证明** 设 $f:(P)\overline{\wedge}(P')$ 为一维基本形上的一个射影变换， $P_i \longleftrightarrow P_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ 为 $f$ 的三对相异的对应元素．则 $f$ 可以由此完全确定．即

$$(P_1, P_2, P_3, \cdots)\overline{\wedge}(P_1', P_2', P_3', \cdots).$$

现设 $P_1, P_1'$ 相互对应．则有

$$(P_1, P_1', P_2, P_3, \cdots)\overline{\wedge}(P_1', P_1, P_2', P_3', \cdots),$$

所以

$$(P_1P_1', P_2P_3) = (P_1'P_1, P_2'P_3'). \tag{2.18}$$

假设 $P_2'$ 作为第一基本形 $(P)$ 的元素时，其对应元素为第二基本形 $(P')$ 中的元素 $Q$. 我们来证 $Q = P_2$. 因为

$$(P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, \cdots)\overline{\wedge}(P_1', P_1, P_2', Q, P_3', \cdots),$$

所以

$$(P_1P_1', P_2P_2') = (P_1'P_1, P_2'Q) = (P_1P_1', QP_2'),$$

从而有 $Q = P_2$, 于是

$$(P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, \cdots)\overline{\wedge}(P_1', P_1, P_2', P_2, P_3', \cdots).$$

即 $P_2, P_2'$ 也相互对应. 同理可证 $f$ 的任一对对应元素都相互对应, 从而 $f$ 为对合. 证毕.

**推论 2.13** 在同一对应下，一维基本形的三对相异的对应元素 $P_i, P_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ 属于同一对合 $\Longleftrightarrow$

$$(P_1P_1', P_2P_3) = (P_1'P_1, P_2'P_3'). \tag{2.19}$$

(2.19) 式称为确定对合的几何条件.

**三、对合不变元素及其性质**

在 (2.15) 中，令 $\lambda = \lambda'$ 可得确定对合不变元素参数的方程为

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0 \qquad (ad - b^2 \neq 0), \tag{2.20}$$

立刻可得下述结论.

**定理 2.23** 一维基本形上的任一个对合总有两个相异的不变元素.

据定理 2.23, 一维基本形上的对合按其不变元素分类只有 **双曲型对合** 和 **椭圆型对合** 两类，不存在抛物型对合.

**定理 2.24** 一个一维射影变换成为对合 $\Longleftrightarrow$ 此射影变换存在两个相异不变元素，而且其余任一对对应元素被两个不变元素调和分离.

**证明** “$\Longrightarrow$”设 $f:\ (P) \to (P')$ 为对合，$E, F$ 为其两个不变元素，$P, P'(P \neq P')$ 为任一对对应元素．则由 §2.4 定理 2.18 有

$$(PP', EF) = k(\text{常数}).$$

但是因为 $P, P'; E, E; F, F$ 为同一对合的三对对应元素，由几何条件有

$$(PP', EF) = (P'P, EF),$$

即 $k^2 = 1$, 而显然 $k \neq 1$. 故 $k = -1$.

“$\Longleftarrow$” 若对于任意一对对应元素 $P, P'$, 均有 $(PP', EF) = -1$, 则

$$(PP', EF) = (P'P, EF).$$

根据几何条件， $P,P';E,E;F,F$ 属于同一对合，由 $P$ 的任意性，证毕.

定理 2.24 说明对合的特征不变量为 $-1$.

**例 2.14** 设 $A,A';B,B'$ 为一维基本形上一个对合的两对相异的对应元素，$E,F$ 为此对合的两个不变元素．求证： $A,B;A'B';E,F$ 是属于另一个对合的三对对应元素.

**证明** 只要证明满足几何条件．由题设有

$$(AB',EF)=(A'B,EF),$$

所以

$$(AB',EF)=(BA',FE) \implies (EF,AB')=(FE,BA'),$$

由几何条件得结论.

**例 2.15** 已知一维基本形上一个对合的两不变元素的参数为 $1,2$. 求这个对合的方程.

**解** 设所求对合方程为 $a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0$. 则其不变元素方程为 $a\lambda^2+2b\lambda+d=0$. 据韦达定理，有

$$\begin{cases} 1\cdot 2=\dfrac{d}{a}, \\ 1+2=-\dfrac{2b}{a}, \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{d}{a}=2, \\ -2\dfrac{b}{a}=3, \end{cases}$$

解得 $a:b:d=2:-3:4$. 故所求对合方程为

$$2\lambda\lambda'-3(\lambda+\lambda')+4=0.$$

## 四、 Desargues 对合定理

**定理 2.25**(Desargues 对合定理) 不经过顶点的任一直线与完全四点形的三双对边的交点是属于同一对合的三对对应点.

**证明** 如图 2.25, 设不经过 $A,B,C,D$ 的直线 $s$ 交完全四点形 $ABCD$ 的三双对边于 $P,P'$; $Q,Q'$; $R,R'$. 因为

$$(P,P',Q,R)\overset{(B)}{\overline{\wedge}}(X,P',D,C)\overset{(A)}{\overline{\wedge}}(P,P',R',Q'),$$

所以

$$(P,P',Q,R)\overline{\wedge}(P,P',R',Q').$$

于是

$$(PP',QR)=(PP',R'Q')=(P'P,Q'R'),$$

从而 $P,P';Q,Q';R,R'$ 属于同一对合.

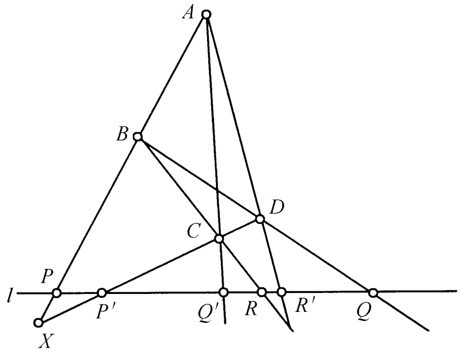



图 2.25

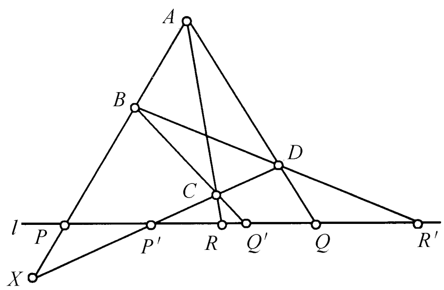



图 2.26

**例 2.16**　已知 $P,P';Q,Q'$ 为点列 $l(P)$ 上的对合的两对相异的对应点， $R$ 为 $l(P)$ 上的任一点.

求作： $R$ 在此对合下的对应点 $R'$.

**解**　作法： (1)　在 $l$ 外任取一点 $X$, 作直线 $XP,XP'$;

(2)　过 $Q$ 任作直线交 $XP,XP'$ 于 $A,D$;

(3)　连 $AR$ 交 $XP'$ 于 $C$, 连 $Q'C$ 交 $XP$ 于 $B$ ;

(4)　连 $BD$ 交 $l$ 于 $R'$ 为所求.

证明：由作法， $ABCD$ 为完全四点形， $l$ 为不过顶点的直线， $P,P'$; $Q,Q'$; $R,R'$ 为直线 $l$ 与完全四点形 $ABCD$ 的三双对边的交点, 根据定理 2.25, $P,P'$; $Q,Q'$; $R,R'$ 为属于同一对合的三对对应点.

## 习　题　2.5

1. 已知一维基本形上对合的两对对应元素的参数依次为 $2,2;1,4$. 求对合方程.
2. 求第 1 题中对合的不变元素的参数，并指出它们是哪一种对合.
3. 已知一维基本形上的对合的两个不变元素参数为

(1) $2, 3$,

(2) 方程 $\alpha t^2+2\beta t+\gamma=0(\beta^2-\alpha\gamma\neq 0)$ 的两根,

求对合方程.

4. 写出定理 2.25 的对偶命题.

5. 设 $A, B, C, D$ 是共线点且 $(AB, DP)=(AB, PC)$. 求证: $P$ 有两种可能位置且与 $A, B$ 调和共轭.

6. 设 $A, B, C, D, P$ 为相异的共线五点，且 $(AB, DP)=(AB, PC)$. 证明: $P$ 是由 $A\leftrightarrow B, C\leftrightarrow D$ 所确定的对合下的不变点.

7. 设 $(A, B, C, D, E, F)\barwedge(B, C, D, A, E, F)$. 证明: $E, F$ 为由 $A\leftrightarrow C, B\leftrightarrow D$ 所确定的对合中的不变元素.

8. 求证：线束的对合必有一对对应直线相互垂直. 问能否有更多对对应直线相互垂直？

## §2.6 二维射影变换

本节介绍二维射影变换 (以点场为主) 的定义，代数表示，简单性质和二维射影变换的不变元素等知识.

### 一、二维射影对应

**定义 2.12** 两个点场间使得对应点连线共点的双射称为点场间的 **透视对应**.

显然，透视对应实际上就是平面间的中心射影. 它是射影对应的特例.

**定义 2.13**(Steiner) 设 $\pi, \pi'$ 为两个点场. 若 $\varphi: \pi\to\pi'$ 满足

(1) $\varphi$ 为双射;

(2) $\varphi$ 使得共线点变为共线点;

(3) $\varphi$ 保持共线四点的交比不变,

则称 $\varphi$ 为点场 $\pi$ 到点场 $\pi'$ 的一个 **二维射影对应**.

**定义 2.14** 设在点场 $\pi$ 和 $\pi'$ 上各取定了齐次射影坐标系，称由下式所决定的对应

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}\qquad |A|=|a_{ij}|\neq 0,\ \rho\neq 0. \tag{2.21}$$

为点场 $\pi$ 到 $\pi'$ 的一个 **非奇异线性对应**. 其中 $(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1', x_2', x_3')$ 为对应点的齐次坐标, $A$ 称为这个非奇异线性对应的矩阵. 如果 $\pi=\pi'$, 且对应点的齐次坐标是关于平面上同一个取定的射影坐标系而论的，则称 (2.21) 为点场 $\pi$ 上的一个 **非奇异线性变换**.

显然，非奇异线性对应是点场之间的一个双射. 利用线性代数知识立刻可得下列结论.

**定理 2.26** 设在射影平面 $\pi$ 与 $\pi'$ 上各取定了齐次射影坐标系. 设 $f:\pi \longrightarrow \pi'$ 为一个非奇异线性对应，其表达式为 (2.21). 设 $\pi$ 上的相异二点 $A, B$ 在 $f$ 下分别对应于 $\pi'$ 上的点 $A', B'$, $A, B$ 的齐次坐标 $a, b$ 在 $f$ 下分别对应于 $A', B'$ 的齐次坐标 $\rho_1 a', \rho_2 b'$. 则有 $f(a+\lambda b) = \rho_1 a' + \lambda \rho_2 b'$.

定理 2.26 说明非奇异线性对应不仅使得点列对应于点列，而且保持点列的非齐次参数表示的参数不变, 从而使得任何共线四点的交比等于其对应四点的交比. 因此，我们有

**定理 2.27** 点场间的任何非奇异线性对应都是一个二维射影对应.

**定理 2.28**(Möbius) 设在两个射影平面 $\pi, \pi'$ 上各取定了齐次射影坐标系，$P_1, P_2$, $P_3, P$ 与 $P_1', P_2', P_3', P'$ 为 $\pi$ 和 $\pi'$ 上任意的四点组 (其中各组内均无三点共线). 则存在惟一非奇异线性对应 $f:\pi \longrightarrow \pi'$, 使得 $f(P_i) = P_i'(i=1,2,3)$, $f(P) = P'$.

本定理的证明可以利用射影坐标映射和坐标变换等知识得到，也可以利用线性代数知识得到，我们略去本定理的证明.

**定理 2.29** 设 $\varphi:\pi \longrightarrow \pi'$ 为一个二维射影对应. 则在取定射影坐标系后， $\varphi$ 必为非奇异线性对应.

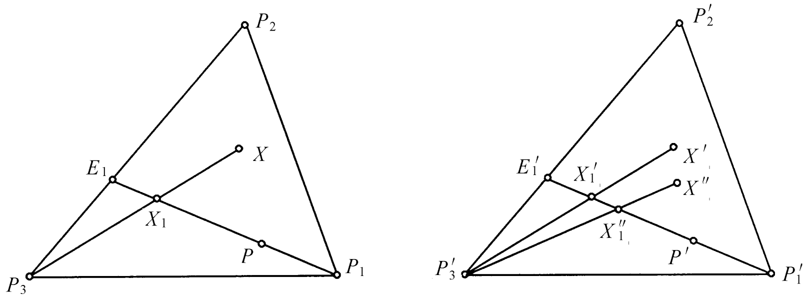



图 2.27

**证明** 设 $P_1, P_2, P_3, P$ 为 $\pi$ 上取定的无三点共线的四点组，且 $\varphi(P_i) = P_i'(i=1,2,3)$, $\varphi(P) = P'$. 则显然 $P_1', P_2', P_3', P'$ 是 $\pi'$ 上的一个无三点共线的四点组. 由定理 2.28, 存在惟一一个非奇异线性对应 $f:\pi \longrightarrow \pi'$, 使得 $f(P_i) = P_i'(i=1,2,3)$, $f(P) = P'$. 我们来证 $\varphi = f$. 为此，设 $X$ 为 $\pi$ 上任一点，且 $\varphi(X) = X'$, 而 $f(X) = X''$. 只要证明 $X'' = X'$. 如图 2.27, 设 $P_1P$ 交 $P_2P_3$ 于 $E_1$, $\varphi(E_1) = E_1'$. 则 $E_1'$ 必定为 $P_1'P$ 与 $P_2'P_3'$ 的交点，且据定理 2.26 必有 $f(E_1) = E_1'$. 现设 $P_1P$ 交

$P_3X$ 于 $X_1$, $\varphi(X_1)=X_1'$. 则 $X_1'$ 为 $P_1'P'$ 与 $P_3'X'$ 的交点. 设 $f(X_1)=X_1''$. 则 $X_1''$ 为 $P_1'P'$ 与 $P_3'X''$ 的交点. 根据 Steiner 定义和定理 2.26, 我们有

$$(P_1'P', X_1'E_1') = (P_1P, X_1E_1) = (P_1'P', X_1''E_1').$$

从而, $X_1'=X_1''$, 即 $X''$ 必在直线 $P_3'X'$ 上. 同理 $X''$ 必在 $P_2'X'$ 上, 即 $X''=X'$.

**定义 2.15** 设在点场 $\pi$ 和 $\pi'$ 上各取定了齐次射影坐标系，称非奇异线性对应 (2.21) 为点场 $\pi$ 与 $\pi'$ 之间的一个 **二维射影对应**.

我们也将定义 2.15 称为二维射影对应的代数定义，或者将 (2.21) 称为二维射影对应的代数表示. 视应用场合需要， (2.21) 式可以采用不同的写法，比如

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \qquad i=1,2,3, \quad \rho\neq 0, \quad |A|\neq 0 \tag{2.21$'$}$$

或者

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |A|\neq 0, \quad \rho\neq 0. \tag{2.21$''$}$$

利用线性代数知识不难证明，(2.21) 式不仅给出了两个点场之间的射影对应，而且也同时给定了同底两线场之间的射影对应. 因此， (2.21) 共诱导了下列四个式子:

| | 点场$\longleftrightarrow$ 点场 | 线场$\longleftrightarrow$ 线场 |
|---|---|---|
| $\varphi$ | $\rho x_i' = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_j,\ (i=1,2,3)$ | $\lambda u_i' = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij}u_j,\ (i=1,2,3)$ |
| $\varphi^{-1}$ | $\sigma x_i = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ji}x_j',\ (i=1,2,3)$ | $\mu u_i = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ji}u_j',\ (i=1,2,3)$ |

其中 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式，由 (2.21) 的限制条件 $\rho\neq 0, |A|\neq 0$, 上述表格中各对应式的系数矩阵均非异，且有比例常数 $\lambda\neq 0, \sigma\neq 0, \mu\neq 0$.

下列定理是显然的.

**定理 2.30** 任一个二维射影对应可以由已知四对对应点 (每一方的四点中无三点共线) 惟一确定.

换句话说，二维射影对应可以由已知一对完全四点形的顶点对应惟一确定. 注意到二维射影坐标系实际上就是完全四点形，从而如果指定两个平面上的坐标系对应，也就惟一确定两个射影平面之间的一个二维射影对应.

显然，这里定义的二维射影对应保持同素性和关联关系，因此也称为 **直射对应**.

**例 2.17** 求二维射影对应式，使得射影平面 $\pi$ 上四点 $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,\ 1)$, $P_4(1,1,1)$ 依次对应于射影平面 $\pi'$ 上四点 $P_1'(1,0,1)$, $P_2'(0,1,1)$, $P_3'(1,1,1)$, $P_4'(0,0,1)$.

**解** 容易验证，已知的两个四点组均无三点共线. 设所求对应式为

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases} \quad |A| = |a_{ij}| \neq 0,\ \rho \neq 0. \tag{2.21}$$

依次将每对对应点的坐标代入，得

$$P_1(1,0,0) \leftrightarrow P_1'(1,0,1) \qquad \begin{cases} \rho_1 = a_{11}, \\ 0 = a_{21}, \\ \rho_1 = a_{31}; \end{cases}$$

$$P_2(0,1,0) \leftrightarrow P_2'(0,1,1) \qquad \begin{cases} 0 = a_{12}, \\ \rho_2 = a_{22}, \\ \rho_2 = a_{32}; \end{cases}$$

$$P_3(0,0,1) \leftrightarrow P_3'(1,1,1) \qquad \begin{cases} \rho_3 = a_{13}, \\ \rho_3 = a_{23}, \\ \rho_3 = a_{33}; \end{cases}$$

$$P_4(1,1,1) \leftrightarrow P_4'(0,0,1) \qquad \begin{cases} 0 = a_{11} + a_{12} + a_{13}, \\ 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23}, \\ \rho_4 = a_{31} + a_{32} + a_{33}. \end{cases}$$

从上述 12 个式子中消去 $\rho_i$(即解一个以 $\rho_i$ 和 $a_{ij}$ 为未知数的 13 个未知数 12 个方程的齐次线性方程组), 解出 $a_{ij}$ 的一组比值为

$$\begin{aligned} &a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{31} : a_{32} : a_{33} \\ = &1 : 0 : -1 : 0 : 1 : -1 : 1 : 1 : -1. \end{aligned}$$

故所求射影对应式为

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 \phantom{+x_2} - x_3, \\ \rho x_2' = \phantom{x_1 +} x_2 - x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

## 二、二维射影变换

**定义 2.16** 两个同底的点场或线场之间的射影对应称为 **二维射影变换**.

显然，二维射影变换是特殊的二维射影对应，变换是相对于射影平面上一个取定的射影坐标系进行的，(2.21) 式表示了一个点与其像点的坐标之间的关系，二维射影变换具有二维射影对应的全部性质. 同时, 如果我们将 $(x_1, x_2, x_3)$ 与 $(x_1', x_2', x_3')$ 看成同一个点在平面上不同的射影坐标系下的坐标，则 (2.21) 式即为射影坐标变换式，于是，射影坐标变换也可以视为射影变换.

我们来讨论二维射影变换的不变元素问题.

1. 不变点

点 $P(y_1, y_2, y_3)$ 为射影变换 $\rho x_i' = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$ 的不变点 $\Longleftrightarrow y_1 : y_2 : y_3 = y_1' : y_2' : y_3' \Longleftrightarrow$ 存在 $\alpha \neq 0$, 使得 $y_i' = \alpha y_i \ \ (i = 1, 2, 3) \Longleftrightarrow$

$$\rho \alpha y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

令 $\lambda = \rho \alpha \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = 0, \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \lambda) y_2 + a_{23} y_3 = 0, \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + (a_{33} - \lambda) y_3 = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\lambda$ 使得

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = |A - \lambda E| = f(\lambda) = 0, \tag{2.23}$$

于是我们得到下列定理.

**定理 2.31** 二维射影变换 $\varphi$ 有不变点 $\Longleftrightarrow \varphi$ 的矩阵 $A$ 的特征多项式有根.

因为 $f(\lambda) = 0$ 一般为三次方程，根据代数基本定理，它至少有一个根. 从而有

**推论 2.14** 任一个二维射影变换至少有一个不变点.

2. 不变直线

直线 $l[v]$ 为射影变换 $\mu u_i = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ji} u_j'$ 的不变直线 $\Longleftrightarrow v_1 : v_2 : v_3 = v_1' : v_2' : v_3'$ $\Longleftrightarrow$ 存在 $\kappa \neq 0$, 使得 $v_i = \kappa v_i' \ \ (i = 1, 2, 3) \Longleftrightarrow$

$$\mu \kappa v_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} v_j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(这里，为方便计，我们去掉“ $'$ ”), 令 $\gamma = \mu\kappa \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} (a_{11}-\gamma)v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 = 0, \\ a_{12}v_1 + (a_{22}-\gamma)v_2 + a_{32}v_3 = 0, \\ a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + (a_{33}-\gamma)v_3 = 0 \end{cases} \tag{2.22$'$}$$

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\gamma$ 使得

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\gamma & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\gamma & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\gamma \end{vmatrix} = |A'-\gamma E| = |(A-\gamma E)'| = f(\gamma) = 0. \tag{2.23$'$}$$

于是有下列定理.

**定理 2.31$'$** 二维射影变换 $\varphi$ 有不变直线 $\Longleftrightarrow$ $\varphi$ 的矩阵 $A$ 的特征多项式有根.

注意到 $f(\lambda)$ 与 $f(\gamma)$ 为同一多项式，有下列定理.

**推论 2.14$'$** 任一个二维射影变换至少有一条不变直线.

**例 2.18** 求二维射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 - x_2 + x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \tag{1}$$

的不变元素.

**解** (一) 列出特征方程并求特征根.

射影变换 (1) 的矩阵的特征方程为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-1) = 0,$$

所以，特征根为 $\lambda_1 = -2$(二重根), $\lambda_2 = 1$(单根).

(二) 求不变点

射影变换 (1) 的不变点方程组为

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (-1-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (-1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

将 $\lambda_1=-2$ 代入 (2), 得到的方程组的秩为 1, 只有一个独立方程为

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

这是一条直线的方程，故对应于 $\lambda_1=-2$ 的不变点为以此直线为底的一个不变点列 (此点列上的任一点都是不变点).

将 $\lambda_2=1$ 代入 (2) 得

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

此方程组的秩为 2, 有两个独立方程为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$$

从中解出对应于 $\lambda_2=1$ 的不变点坐标为 $(1,1,1)$.

(三) 求不变直线

射影变换 (1) 的不变直线方程组为

$$\begin{cases}(-1-\lambda)u_1+u_2+u_3=0,\\ u_1+(-1-\lambda)u_2+u_3=0,\\ u_1+u_2+(-1-\lambda)u_3=0.\end{cases}\tag{2'}$$

将 $\lambda_1=-2$ 代入 $(2')$, 得到的方程组的秩为 1, 只有一个独立方程为

$$u_1+u_2+u_3=0.$$

这是一个点的方程，坐标为 $(1,1,1)$, 故对应于 $\lambda_1=-2$ 的不变直线为以此点为束心的一个不变线束 (此线束中的任一直线都是不变直线).

将 $\lambda_2=1$ 代入 $(2')$ 得

$$\begin{cases}-2u_1+u_2+u_3=0,\\ u_1-2u_2+u_3=0,\\ u_1+u_2-2u_3=0.\end{cases}$$

此方程组的秩为 2, 有两个独立方程为

$$\begin{cases} -2u_1+u_2+u_3=0, \\ u_1-2u_2+u_3=0. \end{cases}$$

从中解出对应于 $\lambda_2=1$ 的不变直线的坐标为 $[1,1,1]$, 故此时, $x_1+x_2+x_3=0$ 为一条不变直线.

## 习　题　2.6

1. 在点场 $\pi$ 上设四点 $A(0,0,1)$, $B(1,2,3)$, $C(2,-1,4)$, $D(-1,0,1)$ 依次对应于四点 $A'(1,4,5)$, $B'(-1,13,14)$, $C'(11,23,28)$, $D'(-1,1,2)$. 求射影变换式.

2. 在点场 $\pi$ 上设四点 $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(-1,1,1)$, $(1,1,0)$ 依次对应于四点 $(1,-1,1)$, $(2,1,0)$, $(-2,0,1)$, $(1,3,0)$. 求射影变换式，并求由此诱导的同底线场上的射影变换式.

3. 设有射影变换

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

求点 $P(1,3,2)$, $Q(-1,2,5)$, $R(0,4,-3)$ 在此射影变换下的像点的坐标.

4. 求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1+x_2, \\ \rho x_2' = x_2, \\ \rho x_3' = x_3 \end{cases}$$

的不变元素.

5. 求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1-x_3, \\ \rho x_2' = x_1+2x_2+x_3, \\ \rho x_3' = 2x_1+2x_2+3x_3 \end{cases}$$

的不变元素.

6. 求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = 7x_1+4x_2-x_3, \\ \rho x_2' = -x_1+2x_2+x_3, \\ \rho x_3' = -2x_1-2x_2+5x_3 \end{cases}$$

的不变元素.

7. 求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + 2x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 + 3x_2 + x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

的不变元素.

8. 求射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1, \\ \rho x_2' = 6x_1 + 2x_2 - x_3, \\ \rho x_3' = 3x_3 \end{cases}$$

的不变元素.

# 第三章　变换群与几何学

Klein(克莱因) 变换群观点是研究几何学的一个重要思想. 根据这个思想，一门几何学乃是研究在某一变换群之下保持不变的几何性质和几何量 (统称为不变性) 的科学，利用变换群观点可以对几何学进行分类与比较. 本章将利用变换群思想重新审视我们以前所学过的几何学，对其进行归纳与比较，我们仅讨论二维即平面几何学.

## §3.1　二维射影变换的特例

### 一、仿射变换

**定义 3.1**　在拓广平面上，称保持无穷远直线不变的射影变换为 **射影仿射变换**.

在实射影平面的拓广平面模型，即实射影仿射平面上指定 $x_3=0$ 为无穷远直线. 我们来讨论射影变换成为射影仿射变换的条件.

**定理 3.1**　平面上的射影变换 $\varphi$

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases} \qquad |A| = |a_{ij}| \neq 0,\ \rho \neq 0, \tag{3.1}$$

保持直线 $x_3=0$ 不变 $\Longleftrightarrow$ 在 (3.1) 中 $a_{31}=a_{32}=0$.

**证明**　“ $\Longrightarrow$ ” 因为 $\varphi$ 使得 $x_3=0$ 对应于 $x_3'=0$ ，所以在 (3.1) 中必有 $a_{31}x_1+a_{32}x_2\equiv 0$, 即 $a_{31}=a_{32}=0$. 从而 (3.1) 式变成

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \rho x_3' = \phantom{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +} a_{33}x_3, \end{cases} \qquad |A| = |a_{ij}| \neq 0,\ \rho \neq 0. \tag{3.2}$$

“ $\Longleftarrow$ ” 在 (3.1) 式中, 若令 $a_{31}=a_{32}=0$. 则 (3.1) 成为 (3.2), 显然保持 $x_3=0$ 不变. 证毕.

在 (3.2) 式中, 因为 $|A|\neq 0$, 即 $a_{33}A_{33}\neq 0$. 从而 $a_{33}\neq 0$, $A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq$

0. 将 (3.2) 的左右两边分别除以 $\rho x'_3$ 和 $a_{33}x_3$, 化为非齐次，得

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.3}$$

显然，当我们将 (3.2) 式化为非齐次得到 (3.3) 式时，已经将射影仿射平面 (即拓广平面) 上的无穷远直线去掉，因而 (3.3) 式是作用于通常平面上的变换. 而且，其中的非齐次坐标是由齐次射影坐标转化而得，故不一定是平面直角坐标系，而是一般的仿射坐标系，我们将这样的平面称为 **仿射平面**, 将形如 (3.3) 的变换称为 **仿射变换**.

射影仿射变换是射影变换的一个重要的特例，而仿射变换则为射影仿射变换的有穷远部分，其自身也有很多有意义的特例，比如相似变换、位似变换等等. 我们仅研究下面的一种.

**二、正交变换**

**定义 3.2** 设在仿射平面上取定笛氏直角坐标系，并设仿射变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.4}$$

的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，即 $AA' = A'A = E$, 则称这样的仿射变换为 **正交变换**. (3.4) 的齐次坐标形式是 (3.2) 的特例，称为 **射影正交变换**.

利用正交矩阵和三角函数的性质，正交变换 (3.4) 可以写为平面解析几何中常见的形式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - \lambda y\sin\theta + a, \\ y' = x\sin\theta + \lambda y\cos\theta + b \end{cases} \qquad (\lambda = \pm 1), \tag{3.5}$$

其中 $a, b, \theta$ 为参数.

利用解析几何知识进行一些简单的分析可以推出，一个正交变换必定是有限次的平移、旋转或轴反射的结果.

## 习 题 3.1

1. 设有欧氏平面上一个圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ，试问经过仿射变换 (3.3) 之后，它的像是否还是圆？若不是，它是什么图形？

2. 求圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 在正交变换 (3.4) 或 (3.5) 下的像. 问：圆在正交变换下的像是否还是圆？

3. 射影正交变换保持无穷远直线上的两个共轭虚点 $I$(1,i,0),$J$(1,-i,0) 不变，这两个点称为**圆环点**. 证明：平面上所有的圆都经过两个圆环点.

4. 下列变换是否是仿射变换？其中哪几个是正交变换？

(1) $\begin{cases} x' = x + 2y + 3, \\ y' = x + 3y + 2. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(3x + 4y + 5), \\ y' = \dfrac{1}{5}(4x - 3y - 5). \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 1), \\ y' = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 3). \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x' = 3x - 4y + 1, \\ y' = 4x + 3y - 1. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x' = 2x + 1, \\ y' = 2y - 1. \end{cases}$

## §3.2 平面上的几个变换群

### 一、群与变换群

作为一种工具性知识，我们先简要给出群的概念.

**定义 3.3** 设 $G$ 为非空集合. 在 $G$ 上定义一种代数运算，称为乘法. 如果满足以下公理，则称 $G$ 对于这个乘法构成群，记作 $G$.

Ⅰ 封闭性. $\forall a, b \in G$，有 $ab \in G$.

Ⅱ 乘法满足结合律. $\forall a, b, c \in G$，有 $a(bc) = (ab)c$.

Ⅲ 存在单位元. 存在 $e \in G$，使得 $\forall a \in G$，有 $ae = ea = a$.

Ⅳ 每一元素存在逆元素. $\forall a \in G$，存在 $a^{-1} \in G$，使得 $aa^{-1} = e = a^{-1}a$.

如，非零有理数集对于普通乘法构成群；仅含有数 1 的集合 $\{1\}$ 对于普通乘法构成群；实数域上全体 $n$ 阶可逆方阵的集合对于矩阵的乘法构成群，等等.

群是一种代数概念，或者叫做一种代数系统. 满足定义 3.2 的一种乘法称为赋予集合 $G$ 以一个群的代数结构. 在群中只有一种代数运算即乘法，这比我们通常了解的代数系统要弱得多. 群的乘法一般不满足交换律，若满足，则这种群就被称为 Abel 群. 在代数中，由定义 3.2 即可以用逻辑推理的方法导出群的全部代数性质.

**定义 3.4** 设 $G$ 为群， $H \subseteq G, H \neq \phi$. 若 $H$ 对于 $G$ 的乘法仍然构成群，则称 $H$ 为 $G$ 的一个 **子群**.

**定理 3.2** 设 $H \subseteq G$. $H$ 为 $G$ 的子群 $\Longleftrightarrow$

(1) 若 $h_1, h_2 \in H$，则 $h_1h_2 \in H$;

(2) 若 $h \in H$, 则 $h^{-1} \in H$.

**定义 3.5** 设 $G, G'$ 为群. 若存在双射 $f: G \to G'$ 使得 $\forall a, b \in G$, 均有 $f(ab) = f(a)f(b) = a'b' \in G'$. 则称群 $G$ 与群 $G'$ 为 **同构** 的，记作 $G \cong G'$.

**定理 3.3** 非空集合 $S$ 上的全体一一变换的集合对于变换的乘法构成群，称为集合 $S$ 上的 **全变换群**.

两个变换 $\varphi_1, \varphi_2$ 相乘，实际上是对一个变换的结果再作另一个变换. 在了解变换的乘法之后，定理 3.3 就是显然的了.

**定理 3.4** 设 $G$ 为集合 $S$ 上的全变换群的一个非空子集. 则 $G$ 对于变换的乘法构成群 $\Longleftrightarrow$

(1) 若 $g_1, g_2 \in G$ ，则 $g_1 g_2 \in G$;

(2) 若 $g \in G$, 则 $g^{-1} \in G$.

称 $G$ 为全变换群的一个子群.

**定义 3.6** 设 $G$ 为集合 $S$ 上的全变换群的一个子群. 则称 $G$ 为集合 $S$ 上的一个 **变换群**.

## 二、平面上的几个变换群

1. 射影变换群

**定理 3.5** 平面上全体射影变换的集合 $K$ 对于变换的乘法构成变换群，称变换群 $K$ 为 **射影变换群**.

**证明** 只要验证 $K$ 对于变换的乘法满足定理 3.4.

(1) 设 $\kappa_1, \kappa_2 \in K$. 其中

$$\kappa_1: \quad \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad |A| \neq 0,\ \rho \neq 0,$$

$$\kappa_2: \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad |B| \neq 0,\ \sigma \neq 0.$$

设一点 $X$ 经 $\kappa_1$ 变成点 $X'$, 而点 $X'$ 经 $\kappa_2$ 又变成点 $X''$, 换句话说, 点 $X$ 经过 $\kappa_1, \kappa_2$ 的乘积变换变成点 $X''$. 于是我们有

$$\rho\sigma \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = B \left( \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \right) = (BA) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

令 $\rho\sigma=\lambda$, $BA=C$, 则显然, $\lambda\neq 0, |C|\neq 0$. 即 $\kappa_1$ 与 $\kappa_2$ 的乘积变换

$$\kappa:\quad \lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\qquad |C|\neq 0,\ \lambda\neq 0$$

仍然是射影变换, 即 $\kappa\in K$. 从而 $K$ 中任意两个元素的乘积还在 $K$ 中.

(2) 因为任一射影变换都是非奇异线性变换, 故逆变换总存在, 且逆变换仍然是射影变换, 即对于任意的 $\kappa\in K$, 总存在 $\kappa^{-1}\in K$.

综上, $K$ 是变换群.

2. 仿射变换群

仿照定理 3.5, 可以证明下面的定理.

**定理 3.6** 射影仿射平面上全体射影仿射变换的集合 $KA$ 构成变换群, 称为**射影仿射变换群**; 仿射平面上全体仿射变换的集合 $A$ 构成变换群, 称变换群 $A$ 为**仿射变换群**.

显然, 射影仿射变换群 $KA$ 与仿射变换群 $A$ 之间有一个自然的同构映射, 我们直接给出定理 3.7.

**定理 3.7** 射影仿射变换群 $KA$ 为射影变换群 $K$ 的一个子群, 而且 $KA\cong A$.

3. 正交变换群

类似于仿射变换群的讨论, 我们可以得到关于正交变换群的下列两个结论.

**定理 3.8** 射影仿射平面上全体射影正交变换 $KM$ 构成变换群, 称为**射影正交变换群**; 仿射平面上全体正交变换的集合 $M$ 构成变换群, 称 $M$ 为**正交变换群**.

**定理 3.9** 射影正交变换群 $KM$ 为射影仿射变换群 $KA$ 的子群, 而且 $KM\cong M$.

综上, 我们在射影平面和仿射平面上各得到了一个变换群系列, 记 $P$ 与 $PA$ 分别表示射影平面和仿射平面, 则上述两个系列的变换群有如下的关系

$$\begin{array}{lccccc} P: & K & \supset & KA & \supset & KM \\ & & & \cong & & \cong \\ PA: & & & A & \supset & M \end{array}$$

## 习 题 3.2

1. 试给出定理 3.6, 3.7, 3.8 和 3.9 的证明.

## §3.3 变换群与几何学

利用变换群观点对几何学进行定义和分类，这就是 F. Klein 观点. 这个思想是德国数学家 F. Klein 于 1872 年在德国 Erlangen 大学所作的题为“近世几何学研究的比较评论”的讲演中首次提出的，该讲演后来被称为 F. Klein 观点或 Erlangen 纲领. 它将当时已有的一些几何学统一于变换群观点之下，给出了建立抽象空间所对应的几何学的一种方法，对几何学的发展起到了巨大的促进和推动作用，甚至对物理学、力学的发展也产生了影响. 科学发展到现今， Erlangen 纲领已经远不能概括许多新的几何学，但是，事实上这个纲领统治了其后几乎半个世纪的几何学研究与发展.

### 一、 F. Klein 变换群观点

**定义 3.7** 设 $S$ 为一个非空集合， $G$ 为 $S$ 上的一个变换群. 称 $S$ 为 **空间**，$S$ 的元素称为点， $S$ 的子集 $F$ 称为图形， $G$ 称为空间 $S$ 的 **主变换群**. 研究空间 $S$ 中图形所决定的在 $G$ 的每一个元素的作用下保持不变的性质 (称为 $G$ 不变性) 和数量 (称为 $G$ 不变量) 的科学称为一门 **几何学**$(S,G)$.

由定义 3.7, 每给定非空集合 $S$ 上的一个变换群 $G$, 就可以构成一门几何学. 事实上，设 $F,F'$ 为空间 $S$ 中的两个图形 (即 $S$ 的子集), 若有 $g\in G$, 使得 $g(F)=F'$. 则称图形 $F$ 与 $F'$ 等价，记作 $F\sim F'$. 容易证明，“ $\sim$ ”是空间 $S$ 中所有图形构成的集合上的一个等价关系. 即

(1) 反身性. $F\sim F$, 任一个图形与它自己等价. 只要取 $g=e$ 为 $G$ 中的单位元 (即恒同变换) 即可；

(2) 对称性. 若 $F\sim F'$, 则 $F'\sim F$. 因为在变换群 $G$ 中任一元素都在 $G$ 中有逆元素，所以，在 $G$ 中既存在将 $F$ 变为 $F'$ 的变换 $g$, 就一定存在将 $F'$ 变为 $F$ 的逆变换 $g^{-1}$;

(3) 传递性. 若 $F\sim F'$, 而 $F'\sim F''$, 则 $F\sim F''$. 这是因为变换群对于乘法的封闭性，即若 $g,f$ 分别是将 $F$ 变为 $F'$ 和将 $F'$ 变为 $F''$ 的变换，则显然在 $G$ 中有变换 $fg$, 将 $F$ 变为 $F''$.

由上述讨论， $G$ 必可将 $S$ 中所有图形分为等价类， (比如在射影变换群的作用下，射影平面上的所有点列属于同一等价类；所有线束是同一类；所有三点形属于同一类；所有完全四点形属于同一类； $\cdots\cdots$), 同一等价类中图形所共有的性质就是关于所论变换群的不变性.

当我们在 $S$ 上给定不同的变换群时，就得到了不同的几何学，特别地，有下述定义.

**定义 3.8** 设 $(S,G)$ 为一个几何学，群 $H$ 是 $G$ 的子群. 则称几何学 $(S,H)$ 为

几何学 $(S,G)$ 的一个 **绝对子几何学**, 简称 **子几何学**.

设 $\Sigma\subset S$, $\Sigma\neq\phi$, $H$ 为 $G$ 的子群，且对于任意的 $g\in H$, 都有 $g(\Sigma)=\Sigma$, 又 $H_\Sigma$ 为 $\Sigma$ 上的一个变换群，且 $H_\Sigma\cong H$ 则称 $(\Sigma,H_\Sigma)$ 为 $(S,G)$ 的一个以 $(S,H)$ 为 **伴随绝对子几何学** 的 **相对子几何学**, 并称 $B=S\setminus\Sigma$ 为 $(\Sigma,H_\Sigma)$ 的 **绝对形**.

例如， $KA\subseteq K$, 对于任意的 $\tau\in KA$, 有 $\tau(P\setminus l_\infty)=P\setminus l_\infty$, 对于射影平面而言， $\Sigma=P\setminus l_\infty=PA$, 因为 $A\cong KA$, 于是， $(PA,A)$ 为 $(P,K)$ 的一个以 $(P,KA)$ 为伴随绝对子几何学的相对子几何学，其中 $l_\infty$ 为绝对形.

子几何学中研究的是关于 $G$ 的子群 $H$ 的不变性和不变量，这些不变性和不变量有的可能关于群 $G$ 保持不变，而有的则不能．反之，由于 $H$ 是 $G$ 的子群，所以所有关于 $G$ 的不变性和不变量必定都被子几何学 $(S,H)$ 所继承，继续保持不变. 这就是说，变换群越大，可研究的几何学内容就越少，变换群越小，几何学的内容就越丰富，换句话说，子几何学的内容要比母几何学丰富．但是，变换群越大，其讨论的内容在这个几何学系列中就一定越具有纲领性意义.

综上讨论，我们得到如下几何学系列：

$$\begin{array}{ccccc}
\text{射影几何} & & \text{射影仿射几何} & & \text{射影欧氏几何} \\
(P,K) & \Longleftarrow & (P,KA) & \Longleftarrow & (P,KM) \\
 & \nwarrow & \| & \nwarrow & \| \\
 & & (PA,A) & \Longleftarrow & (PA,M) \\
 & & \text{仿射几何} & & \text{欧氏几何}
\end{array}$$

注：在上述图表中，“ $\Longleftarrow$ ” 表示后者为前者的绝对子几何学；“ $\longleftarrow$ ” 表示后者为前者的相对子几何学；“ $=$ ” 表示伴随关系，相对子几何学的绝对形均为 $l_\infty$.

### 二、平面上几种几何学的比较

1. 射影几何学

射影几何学是以射影平面作为空间，以射影变换群 (其元素是二维射影变换) 为主变换群的几何学．射影几何学研究的是图形的射影不变性和不变量．由前面两章，我们已经看到，最基本的射影不变性有同素性 (即点的像仍然是点；直线的像仍然是直线) 、关联性 (即点与直线的关联关系：某点在某直线上，某直线通过某点), 最基本的射影不变量是交比．所有其他射影不变性和不变量都是由这些基本的不变性和不变量演绎出来的性质和数量．而我们以前经常见到的如距离、角度、平行性等，都不是射影几何学的研究内容.

2. 仿射几何学

射影仿射几何学是以拓广平面为空间, 射影仿射变换群为主变换群的几何学.

事实上, 因为无穷远直线在射影仿射变换群下保持不变, 故以无穷远直线作为绝对形的仿射几何学就仿射性质而言, 与射影仿射几何学是同构的. 因而我们也常常去掉无穷远直线, 直接将仿射几何学与欧氏几何学都作为射影几何的子几何学.

当然, 作为射影几何学的子几何学, 仿射几何的研究内容首先包含射影几何学的所有研究内容. 但是此外, 它必定有自己独特的研究内容而不属于射影几何.

因为仿射变换保持无穷远直线不变, 也就是说它将无穷远点变成无穷远点, 但是我们知道, 无穷远直线上的点与欧氏平面上的平行直线组是一一对应的, 从而仿射变换必定把平行直线组变为平行直线组.

**定理 3.10** 仿射变换保持平行性不变.

我们曾用透视对应 (即中心射影) 的链来定义射影对应, 而要保持平行性不变, 透视中心只能取在无穷远直线上. 当透视中心为无穷远点时, 这样的透视对应就成了平行投影, 因此仿射对应乃是有限次平行投影的结果.

太阳光束的投射可以看成平行投影, 生活经验告诉我们, 两点间的距离和两直线的夹角显然不被平行投影所保持. 在仿射变换下, 保持不变的几何量是什么呢？

**定义 3.9** 设 $P_1, P_2$ 为通常直线上的两个相异的通常点, $P$ 为任一个通常点. 定义

$$(P_1P_2P) = \frac{P_1P}{P_2P}$$

为 $P_1, P_2, P$ 的 **简单比**, 简称 **单比**. 其中 $P_1, P_2$ 称为 **基点**, $P$ 称为 **分点**.

**推论 3.1** 设 $P_1, P_2, P$ 为通常直线 $l$ 上的三个通常点, $P_\infty$ 为 $l$ 上的无穷远点. 则

$$(P_1P_2P) = (P_1P_2, PP_\infty).$$

**定理 3.11** 平面上共线三点的单比为仿射不变量.

**证明** 设 $P_1, P_2, P$ 为直线 $l$ 上的通常点, $P_\infty$ 为 $l$ 上的无穷远点. 设在仿射变换下, 直线 $l$ 的像为 $l'$, 则上述四点的像也在 $l'$ 上, 而且前三点必定仍为通常点, 设为 $P_1', P_2', P'$; 而 $P_\infty$ 的像必为 $l'$ 上的无穷远点. 又仿射变换是射影变换, 所以

$$(P_1P_2P) = (P_1P_2, PP_\infty) = (P_1'P_2', P'P_\infty') = (P_1'P_2'P').$$

证毕.

除了拥有射影几何的所有不变性和不变量外, 仿射几何所特有的基本不变性就是平行性, 基本不变量就是共线三点的单比. 其余所有的仿射不变性和不变量都是能够由此演绎出来的性质和数量. 比如, 我们可以演绎出: 平行线段的比、两个三角形的面积之比等等都是仿射不变量; 线段的中点、三角形的重心、梯形、平行四边形等等都是仿射不变图形.

3. 欧氏几何学

欧氏几何学是以欧氏平面为空间，以正交变换群作为主变换群的几何学. 作为仿射几何的子几何学，欧氏几何的研究内容首先包含仿射几何学的全部内容，再加上正交变换特有的不变性和不变量.

**定理 3.12**　平面上两点间的距离是正交变换不变量.

**证明**　设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 为欧氏平面上任意两点. 设在正交变换 (3.4) 下其像分别为 $P_1'(x_1', y_1'), P_2'(x_2', y_2')$. 由 (3.4), 有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

其中 $A$ 为正交阵，即 $AA' = A'A = E$. (3.7) 减 (3.6), 得

$$\begin{pmatrix} x_2' - x_1' \\ y_2' - y_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 转置，得

$$(x_2' - x_1', y_2' - y_1') = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)A'. \tag{3.9}$$

将 (3.9) 的两边分别左乘到 (3.8) 的两边，并注意 $A'A = E$ 可得

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

上式说明，两点间的距离在正交变换下保持不变. 证毕.

有了距离这一基本不变量，加上现有的仿射不变性质，即可以演绎出正交变换的全部不变性和不变量，如角度、面积、体积、全等形等等欧氏几何内容. 在正交变换下，任一个平面图形都变成与它全等的图形，这个事实我们通常称为正交变换保持图形的合同性，这是正交变换的基本不变性.

综上讨论，射影几何学具有最大的变换群，因而具有最少的内容，欧氏几何学在我们讨论的几何系列中具有最小的变换群，因而具有最多的内容.

## 习　题　3.3

1. 下列图形各是何种几何学 (指具有尽可能大的变换群) 的讨论对象？

(1) 梯形； (2) 三角形的重心； (3) 平行四边形； (4) 圆； (5) 三角形的垂心； (6) 调和点列； (7) 线段的垂直平分线； (8) 完全四点形； (9) 两个透视的三点形； (10) 正方形.

2. 下列几何量各是何种几何学 (指具有尽可能大的变换群) 的讨论对象？

(1) 线段的长度； (2) 两直线的夹角； (3) 三角形的面积； (4) 点到直线的距离； (5) 两平行线间的距离.

3. 下列几何性质各是何种几何学 (指具有尽可能大的变换群) 的讨论对象？

(1) 平行； (2) 垂直； (3) 平行四边形的对角线互相平分； (4) 共线点或共点线.

4. 求证：两个三角形的面积之比为仿射不变量. 进而证明任意两个封闭图形的面积的比是仿射不变量.

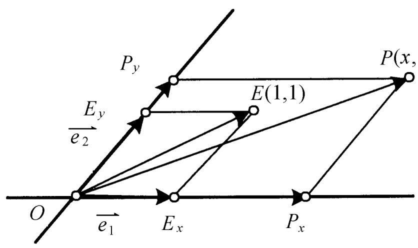



图 3.1

5. 正方形、菱形的哪些性质是仿射不变的？

6. 定义仿射坐标系如下. 设 $O$ 为平面上任意取定的一点， $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 为以 $O$ 为起点的两个不共线向量. 则对于平面上任一点 $P$, 有惟一的表达式

$$\overrightarrow{OP}= x\,\overrightarrow{e_1}+y\,\overrightarrow{e_2}\,.$$

记 $O\,\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ 表示由 $O$ 与 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 确定的 **仿射坐标系**, 称 $(x,y)$ 为点 $P$ 在 $O\,\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ 下的 **仿射坐标**(如图 3.1). 证明：

$$\begin{cases} x=\dfrac{OP_x}{OE_x}=(P_xE_xO), \\ y=\dfrac{OP_y}{OE_y}=(P_yE_yO). \end{cases}$$

进而, 对于射影坐标系 $(A_1A_2A_3|E)$, 令 $A_1A_2$ 为无穷远直线, 试说明仿射坐标系是射影坐标系的特例.

# 第四章　二次曲线理论

本章将在射影平面和射影仿射平面上，分别讨论二次曲线在射影变换群和仿射变换群下的不变性.

## §4.1　二次曲线的射影定义

### 一、二次曲线的代数定义

**定义 4.1**　坐标满足

$$S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_iu_j = 0, (a_{ij} = a_{ji}) \tag{4.1}$$

的所有点 $(x_1, x_2, x_3)$ 的集合称为一条**二阶曲线**. 其中 $A = (a_{ij})$ 称为二阶曲线的矩阵，秩 $(A) \geqslant 1$.

**定义 4.1′**　坐标满足

$$T \equiv \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}x_ix_j = 0, (b_{ij} = b_{ji}) \quad (4.1')$$

的所有直线 $[u_1, u_2, u_3]$ 的集合称为一条**二级曲线**. 其中 $B = (b_{ij})$ 称为二级曲线的矩阵，秩 $(B) \geqslant 1$.

显然，二阶曲线与二级曲线的代数形式完全相同，都表示三元实二次型全体零点的集合. 二阶曲线与二级曲线统称为 **二次曲线**. 对应于不同的场合，二次曲线的方程可以写为不同的表达形式. 比如二阶曲线方程可写为

$$S \equiv (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \qquad 秩(a_{ij}) \geqslant 1.$$

若记 $X = (x_1, x_2, x_3)$, 上述方程又可写为

$$S \equiv XAX' = 0, \qquad A = A'，秩(A) \geqslant 1.$$

**定义 4.2**　若定义 4.1 中的二次齐式 $S$ 可以分解为两个一次因式的乘积，则称二阶曲线 $S = 0$ 为 **退化** 的，否则称为 **非退化** 的.

**定义 4.2′**　若定义 4.1′ 中的二次齐式 $T$ 可以分解为两个一次因式的乘积，则称二级曲线 $T = 0$ 为 **退化** 的，否则称为 **非退化** 的.

显然，退化二阶曲线的几何形态为直线，退化二级曲线的几何形态为点. 可以证明， $S = 0$ 退化 $\Longleftrightarrow |a_{ij}| = 0$; $T = 0$ 退化 $\Longleftrightarrow |b_{ij}| = 0$.

## 二、二次曲线的射影定义

**定理 4.1** 不同心的两个成射影对应的线束对应直线交点的全体构成一条过此二线束束心的二阶曲线.

**定理 4.1′** 不同底的两个成射影对应的点列对应点连线的全体构成一条含此二点列的底的二级曲线.

**证明** 只证明定理 4.1. 在平面上取定齐次射影坐标系，设 $O(p)\barwedge O'(p')$. 在线束 $O(p)$ 中取定二直线

$$l_1:\quad A\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\qquad l_2:\quad B\equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0.$$

则 $O(p)$ 中任一直线的方程可表为 $A+\lambda B=0(\lambda\in\overline{R})$. 同理，线束 $O'(p')$ 中任一直线方程可表为 $A'+\lambda'B'=0(\lambda'\in\overline{R})$.

因为 $O(p)\barwedge O'(p')$, 所以

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0,\quad ad-bc\neq 0.$$

从而 $\lambda,\lambda'$ 满足

$$\begin{cases} A+B\lambda=0,\\ A'+B'\lambda'=0,\\ a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0.\end{cases}$$

由上述方程组消去 $\lambda,\lambda'$, 得

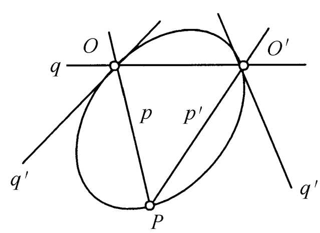



图 4.1

$$aAA'+dBB'-bAB'-cA'B=0.\tag{4.2}$$

容易看出 (4.2) 式为关于 $x_1,x_2,x_3$ 的二次齐次方程，形如 (4.1), 是一条二阶曲线. 此外

$$O:\quad \begin{cases} A=0,\\ B=0,\end{cases}\qquad O':\quad \begin{cases} A'=0,\\ B'=0\end{cases}$$

为 $O, O'$ 的坐标，满足 (4.2), 即 $O, O'$ 在二阶曲线 (4.2) 上，证毕.

**定理 4.2** 设二阶曲线 $\Gamma$ 由射影线束 $O(p)\barwedge O'(p')$ 生成. 则在 $\Gamma$ 上任意取定相异二点 $A, B$ 与 $\Gamma$ 上的动点 $M$ 连线得到两个射影线束 $A(AM)\barwedge B(BM)$.

**定理 4.2′** 设二级曲线 $\Gamma'$ 由射影点列 $l(P)\barwedge l'(P')$ 生成. 则在 $\Gamma'$ 上任意取定相异二直线 $a, b$ 与 $\Gamma'$ 上的动直线 $m$ 相交得到两个射影点列 $a(a\times m)\barwedge b(b\times m)$.

**证明** 我们用综合法证明定理 4.2. 设二阶曲线 $\Gamma$ 由 $O(p)\barwedge O'(p')$ 生成. 则如图 4.2 有 $O(P)\barwedge O'(P)$. 设 $A, B$ 为 $\Gamma$ 上取定二点， $M$ 为 $\Gamma$ 上任一点，且 $AM\times OP=K$, $BM\times O'P=K'$. 则

$$A(M)\overline{\overline{\barwedge}}OP(K),\quad B(M)\overline{\overline{\barwedge}}O'P(K').$$

连 $O'A$ 交 $BM$ 于 $A'$, 连 $OB$ 交 $AM$ 于 $B'$. 因为 $O(P)\barwedge O'(P)$, 所以

$$O(A,B,P,M)\barwedge O'(A,B,P,M).$$

分别以 $AM, BM$ 截上述两个线束，得

$$AM(A,B',K,M)\barwedge BM(A',B,K',M).$$

注意到在上述射影对应中公共元素 $M$ 自对应，所以

$$(A,B',K,M)\overline{\overline{\barwedge}}(A',B,K',M).$$

于是这两个点列对应点的连线共点，特别地， $AA', BB', KK'$ 共点于 $S$. 注意到 $S=AA'\times BB'=AO'\times BO$ 为定点，所以当 $M$ 变动时， $KK'$ 过定点 $S$, 即 $OP(K)\overline{\overline{\barwedge}}O'P(K')$. 从而 $A(M)\barwedge B(M)$. 证毕.

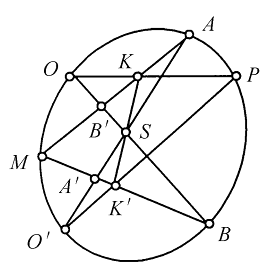



图 4.2

**推论 4.1** 平面上五个点 (其中无三点共线) 惟一确定一条非退化二阶曲线.

**推论 4.1′** 平面上五条直线 (其中无三线共点) 惟一确定一条非退化二级曲线.

**证明** 设 $O, O', P_1, P_2, P_3$ 为平面上满足条件的五点. 以 $O, O'$ 为束心与 $P_i$ 相连得两个线束 $O(P_i)$ 与 $O'(P_i)$. 令与同一点相连的直线为对应直线, 则可惟一确定 $O(P)\overline{\wedge}O'(P)$. 于是由定理 4.1, 存在一条非退化二阶曲线过此五个已知点, 据定理 4.2, 这条二阶曲线是惟一的.

从代数的观点看本推论是显然的, 因为系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 是对称阵, 只有 6 个元素, 由齐次性, 这 6 个元素中只有 5 个独立. 显然, 如果上述推论括号中的条件不满足, 则可能确定退化的二次曲线.

**推论 4.2** 任一二阶曲线可由两个射影线束生成.

**推论 4.3** 二阶曲线上任一点与此曲线上四个定点连线所得四直线的交比为常数.

**推论 4.2′** 任一二级曲线可由两个射影点列生成.

**推论 4.3′** 二级曲线上任一直线与此曲线上四条定直线相交所得四个交点的交比为常数.

特别地, 这个推论对于解析几何中的二次曲线都成立.

**定义 4.3** 在射影平面上, 称两个射影线束对应直线交点的全体为一条二阶曲线.

**定义 4.3′** 在射影平面上, 称两个射影点列对应点连线的全体为一条二级曲线.

二次曲线的射影定义又称为 Steiner 定义. 这个定义与代数定义的等价性已由上述讨论基本给出. 注意, 本定义包含了退化的情况.

**例 4.1** 求由两个射影线束 $x_1 - \lambda x_3 = 0, x_2 - \mu x_3 = 0 (\lambda + \mu = 1)$ 生成的二阶曲线方程.

**解法一** 令

$$A \equiv x_1 = 0, \quad B \equiv -x_3 = 0,$$

$$A' \equiv x_2 = 0, \quad B' \equiv -x_3 = 0,$$

于是得到以 $\lambda + \mu = 1$ 为参数表达式的两个射影线束

$$\begin{cases} A + \lambda B = 0, \\ A' + \mu B' = 0. \end{cases}$$

由定理 4.1 的证明, 这两个射影线束生成的二阶曲线的方程为

$$aAA' + dBB' - bAB' - cA'B = 0. \tag{1}$$

将 $a = 0, b = c = 1, d = -1$ 代入 (1), 得

$$x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_3 = 0,$$

即

$$x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

这是一条退化二阶曲线.

**解法二** 由题意，点 $(x_1, x_2, x_3)$ 为已知两个射影线束对应直线的交点 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = 0, \\ x_2 - (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

等价变形，得

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = 0, \\ (x_2 - x_3) + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

于是, 点 $(x_1, x_2, x_3)$ 为已知两个射影线束对应直线的交点 $\Longleftrightarrow$ 上述方程组对 $(1, \lambda)$ 有非零解，即

$$x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_3 = 0.$$

**例 4.2** 设有一个变动的三点形，其三边分别通过不共线的三个定点，其两个顶点又分别在两条定直线 (不经过上述定点) 上移动. 求第三个顶点的轨迹.

**解** 设三点形 $ABC$ 的边 $AB$, $BC$, $CA$ 分别通过三个定点 $P, Q, R$, 两个顶点 $A, B$ 分别在两条定直线 $a, b$ 上移动，假设 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $\cdots$ 为其移动过程中的位置 (如图 4.3). 由题意得

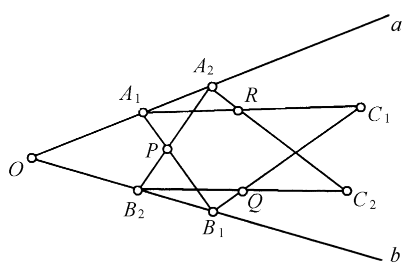



图 4.3

$$R(C_1, C_2, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}P(A_1, A_2, \cdots),$$

$$Q(C_1, C_2, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}P(B_1, B_2, \cdots).$$

所以

$$R(C_1, C_2, \cdots) \barwedge Q(C_1, C_2, \cdots).$$

由定义 4.3 可知，顶点 $C$ 的轨迹为一条经过两个定点 $Q, R$ 的二阶曲线.

**三、二阶曲线的切线与二级曲线的切点**

在本部分中，总假设所论二次曲线是非退化的.

1. 二阶曲线的切线

**定义 4.4** 平面上与二阶曲线 $\Gamma$ 交于两个重合的点的直线称为 $\Gamma$ 的 **切线**.

我们来讨论二阶曲线的切线方程. 设已知二阶曲线

$$\Gamma: \ S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad |(a_{ij})| \neq 0. \tag{4.3}$$

$P(p_i)$ 为平面上取定的一点. 求过点 $P$ 的 $\Gamma$ 的切线方程. 设 $Q(q_i)$ 为平面上任一点，则直线 $PQ$ 上任一点的齐次坐标可表为 $x_i = p_i + \lambda q_i (i = 1, 2, 3)$. 于是， $PQ$ 为 $\Gamma$ 的切线 $\Longleftrightarrow$ 将 $x_i = p_i + \lambda q_i$ 代入 (4.3) 后只有一个解. 代入得

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(p_i + \lambda q_i)(p_j + \lambda q_j) = 0,$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(p_i p_j + \lambda p_i q_j + \lambda q_i p_j + \lambda^2 q_i q_j) = 0,$$

整理得

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i q_j + \lambda \left( \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i p_j \right) + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i p_j = 0. \tag{4.4}$$

为方便计，引入记号

$$\begin{cases} S_{pp} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i p_j, & S_{qq} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i q_j, \\ S_{pq} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j, & S_{qp} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i p_j, \\ S_p \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i x_j, & S_q \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i x_j, \end{cases} \tag{4.5}$$

因为 $a_{ij} = a_{ji}$, 所以 $S_{pq} = S_{qp}$. 代入 (4.4), 得

$$S_{qq}\lambda^2 + 2S_{pq}\lambda + S_{pp} = 0. \tag{4.6}$$

从而， $Q$ 为 $\Gamma$ 的过 $P$ 的切线上的点 $\Longleftrightarrow$ 方程 (4.6) 对 $\lambda$ 有重根，即

$$S_{pq}^2 = S_{qq}S_{pp}. \tag{4.7}$$

(4.7) 即点 $Q(q_i)$ 为 $\Gamma$ 的过点 $P$ 的切线上的点的充要条件，按习惯将其中的 $q_i$ 改写为 $x_i$ 得到 $\Gamma$ 过点 $P$ 的切线方程为

$$S_p^2 = S_{pp}S. \tag{4.8}$$

若 $P$ 在 $\Gamma$ 上，则在 (4.8) 中有 $S_{pp}=0$, 从而得到 $\Gamma$ 的点 $P$ 处的切线方程为

$$S_p = 0. \tag{4.9}$$

注意， (4.9) 式可以有不同的写法，比如利用数学分析中的偏导函数记号，有

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3 = 0, \tag{4.10}$$

亦即

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right) p_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right) p_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right) p_3 = 0, \tag{4.11}$$

或者写为矩阵格式

$$(p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.12}$$

2. 二级曲线的切点

与二阶曲线的切线完全对偶，可以得到关于二级曲线的切点的讨论. 设所论二级曲线为

$$\Gamma':\ \ T \equiv \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}u_iu_j = 0,\ \ (b_{ij}=b_{ji}),\ |(b_{ij})| \neq 0. \tag{4.3$'$}$$

**定义 4.4′** 若过平面上一点有且只有二级曲线 $\Gamma'$ 的一条直线，则称此点为 $\Gamma'$ 的一个 **切点**.

与研究二阶曲线的过平面上一点 $P$ 的切线方程一样，我们来讨论在平面内一直线 $l[l_i]$ 上的二级曲线的切点方程. 以动直线 $m[m_i]$ 与直线 $l$ 相交，得交点 $l\times m$, 如果 $l\times m$ 为切点，可以导出其方程.

因为线束 $l\times m$ 中任一直线的坐标可以表为 $\xi_i = l_i + \lambda m_i, (i=1,2,3)$, 代入 $\Gamma'$ 的方程，得

$$T_{mm}\lambda^2 + 2T_{lm}\lambda + T_{ll} = 0. \tag{4.6$'$}$$

这里各记号的意义完全与对二阶曲线的讨论对偶．于是， $l\times m$ 为 $\Gamma'$ 的切点 $\Longleftrightarrow$ 上述方程对 $\lambda$ 有重根 $\Longleftrightarrow$

$$T_{lm}^2=T_{ll}T_{mm}. \tag{4.7'}$$

将流动线坐标 $m_i$ 改写为 $u_i$, 上式变为

$$T_l^2=T_{ll}T. \tag{4.8'}$$

这就是一般情况下的在直线 $l$ 上的二级曲线的切点方程．特别地，如果 $l\in\Gamma'$, 我们有，切点方程为 $T_l=0$, 此即

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u_1}\right)_l u_1+\left(\frac{\partial T}{\partial u_2}\right)_l u_2+\left(\frac{\partial T}{\partial u_3}\right)_l u_3=0. \tag{4.10'}$$

与切线一样，也有多种不同的表示式．请读者自行写出．

#### 四、二阶曲线与二级曲线的统一

二阶曲线与二级曲线分别是关于点和直线的齐次坐标的二次齐次方程．下面的定理刻画了这两者之间的关系．

**定理 4.3**(Maclaurin 定理)　一条非退化二阶曲线全体切线的集合构成一条非退化二级曲线；一条非退化二级曲线全体切点的集合构成一条非退化二阶曲线.

**证明**　设有非退化二阶曲线

$$\Gamma:\ \ S\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0\quad (a_{ij}=a_{ji}),\qquad |(a_{ij})|\neq 0.$$

设 $\Gamma$ 在点 $P(p_i)$ 处的切线为 $[u_1,u_2,u_3]$ 即 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$. 但是已知 $\Gamma$ 在 $P$ 处的切线为 $S_p=0$ 即 $\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1+\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3=0$, 故有

$$\frac{\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p}{u_1}=\frac{\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p}{u_2}=\frac{\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p}{u_3}=\rho(\text{常数}),$$

即

$$\frac{a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3}{u_1}=\frac{a_{12}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3}{u_2}=\frac{a_{13}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3}{u_3}=\rho,$$

即

$$\begin{cases}a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3 & -\rho u_1=0,\\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3 & -\rho u_2=0,\\ a_{13}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3 & -\rho u_3=0,\\ u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3 & =0.\end{cases}$$

从而， $[u_1,u_2,u_3]$ 为 $\Gamma$ 上点 $P$ 处的切线的充要条件是上述方程组对 $(p_1,p_2,p_3,\rho)$ 有非零解，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.13}$$

展开得

$$T' \equiv \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}u_iu_j = 0, \qquad 且A_{ij} = A_{ji}, |(A_{ij})| = |(a_{ij})|^2 \neq 0.$$

显然， $T'=0$ 为一条非退化二级曲线.

对于定理后半的证明，与前面对偶，由非退化二级曲线

$$\Gamma':\ T \equiv \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}u_iu_j = 0 \quad (b_{ij}=b_{ji}), \quad |(b_{ij})| \neq 0.$$

出发，可以得到与 (4.13) 对偶的方程，展开即得

$$S' \equiv \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}x_ix_j = 0, \qquad 且B_{ij} = B_{ji}, |(B_{ij})| = |(b_{ij})|^2 \neq 0.$$

显然， $S'=0$ 为一条非退化二阶曲线.

**推论 4.4** 若在定理 4.3 中有 $b_{ij}=\alpha A_{ij}\,(\alpha\neq 0)$, 则 $S=0$ 与 $T=0$ 为同一条二次曲线.

定理 4.3 的证明过程提供了对非退化二次曲线的点坐标方程和线坐标方程互化的方法.

### 五、二阶曲线束

利用二阶曲线束的概念，往往可以使得关于二阶曲线的计算变得简便.

设给定两条相异的二阶曲线

$$\Gamma_1:\ f \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (a_{ij}=a_{ji}),$$

$$\Gamma_2:\ g \equiv \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (b_{ij}=b_{ji}),$$

联立

$$\begin{cases} f = 0, \\ g = 0 \end{cases}$$

求解，可以得到 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 的公共点 (交点). 显然，在复数范围内，上述方程组一般有 4 组解，即 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 一般有四个公共点. 于是我们有下列定理.

**定理 4.4** 平面上两条相异的二阶曲线一般有四个公共点.

**定义 4.5** 设 $f = 0, g = 0$ 为平面上两条相异的二阶曲线，则称由

$$f + \lambda g = 0, \qquad \lambda \in \overline{R} \tag{4.14}$$

所决定的二阶曲线的全体为以 $f = 0, g = 0$ 的四个交点为 **基点** 的 **二阶曲线束**. 如果 $f = 0, g = 0$ 交于四个相异点，则称此二阶曲线束为 **二阶曲线的四点形束**.

**定理 4.5** 经过平面上任一点 $P$(不是四个基点之一), 必有一条二阶曲线属于已知二阶曲线束 $f + \lambda g = 0$.

**证明** 因为 $P(p_i)$ 不是 $f = 0$ 与 $g = 0$ 的交点，所以 $f_{pp}$ 与 $g_{pp}$ 不同时为零. 不妨设 $g_{pp} \neq 0$. 令

$$\lambda = -\frac{f_{pp}}{g_{pp}},$$

则 $f + \left(-\frac{f_{pp}}{g_{pp}}\right) g = 0$ 为经过 $f = 0$ 与 $g = 0$ 的四个交点和 $P$ 的二阶曲线. 证毕.

**定理 4.6** 平面上任一二阶曲线束中必有三条退化的二阶曲线，为以四个基点作为顶点的完全四点形的三双对边.

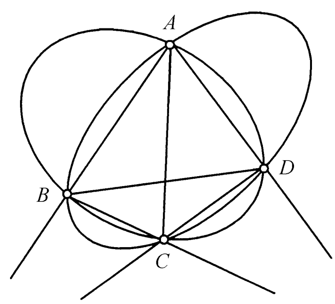



图 4.4

我们略去本定理的证明.

定理 4.6 直观理解：取一完全四点形 $ABCD$, 则以 $A$, $B$, $C$, $D$ 为基点的二阶曲线束中的三条退化的二阶曲线分别为

$\Gamma_1^0$ : $AB \cdot CD = 0$,

$\Gamma_2^0:\quad BC\cdot AD=0,$

$\Gamma_3^0:\quad AC\cdot BD=0.$

由此，在我们求二阶曲线束的参数表示时，可以取其中退化的二阶曲线为基线. 这就给我们提供了一个求二阶曲线方程的捷径.

**例 4.3** 已知平面上五点 $A,B,C,D,E$(其中无三点共线) 的坐标，求由此五点确定的二阶曲线的方程.

**解** 利用二阶曲线束，我们给出求解此类题目的一般方法.

(一) 任取其中四点，如 $A,B,C,D$, 则由此四点可以确定一个二阶曲线的四点形束. 任求出此二阶曲线束中的三条退化二阶曲线中的两条 (当然，实际做题时取较易求者), 比如求出 $f=AB\cdot CD$ 和 $g=AC\cdot BD$, 则此二阶曲线束的参数方程为 $f+\lambda g=0$.

(二) 将 $E$ 的坐标代入，求出

$$\lambda=-\frac{f_{ee}}{g_{ee}},$$

代入 $f+\lambda g=0$ 即可得所求二阶曲线的方程.

**例 4.4** 设已知二阶曲线 $\Gamma$ 过点 $A(1,0,1)$, $C(0,0,1)$, $E(3,2,1)$, 并且已知 $\Gamma$ 的两条切线的方程分别为 $x_1-3x_2-x_3=0$, 和 $2x_1-x_2=0$. 求 $\Gamma$ 的方程.

**解** 易见点 $A$ 在 $x_1-3x_2-x_3=0$ 上，点 $C$ 在 $2x_1-x_2=0$ 上，于是 $\Gamma$ 与已知直线切于点 $A,C$(如图 4.5). 我们用二阶曲线束的知识来求解.

令 $A\equiv B, C\equiv D$, 则可得一个二阶曲线束.

第一步：求出二阶曲线束中两条相异的退化二阶曲线方程. 因为

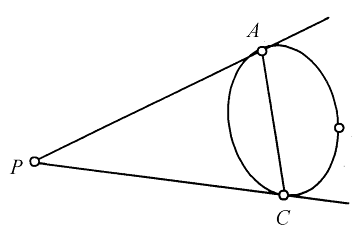



图 4.5

$AB:\quad x_1-3x_2-x_3=0,\qquad CD:\quad 2x_1-x_2=0,$

$AC:\quad x_2=0,\qquad BD:\quad x_2=0.$

于是过 $A,B,C,D$ 四点的二阶曲线束的参数方程为

$$AB\cdot CD+\lambda AC\cdot BD=0,$$

即

$$(x_1 - 3x_2 - x_3)(2x_1 - x_2) + \lambda x_2^2 = 0.$$

第二步：将 $E(3,2,1)$ 代入上式，得 $\lambda = 2$. 故所求二阶曲线方程为

$$2x_1^2 + 7x_2^2 - 7x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

**例 4.5** 设有点 $P(p_1,p_2,p_3)$ 至二阶曲线 $\Gamma : S = 0$ 的切线的切点为 $H_1, K_1$, 自 $Q(q_1,q_2,q_3)$ 至 $S = 0$ 的切线的切点为 $H_2, K_2$.

求证： $H_1, K_1, P, H_2, K_2, Q$ 在同一条二阶曲线上.

**证明** 因为 $P$ 不在二阶曲线 $\Gamma$ 上，所以自 $P$ 到 $\Gamma$ 的两条切线方程为

$$S_{pp} \cdot S = S_p^2,$$

则切点 $H_1, K_1$ 的坐标必满足下列方程组

$$\begin{cases} S_{pp} \cdot S = S_p^2, \\ S = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_p = 0, \\ S = 0, \end{cases}$$

故 $S_p = 0$ 表示直线 $H_1K_1$ 的方程.

同理，切点 $H_2, K_2$ 的坐标必满足下列方程组

$$\begin{cases} S_{qq} \cdot S = S_q^2, \\ S = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_q = 0, \\ S = 0, \end{cases}$$

故 $S_q = 0$ 表示直线 $H_2K_2$ 的方程.

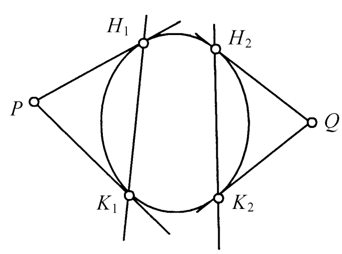



图 4.6

因此，这里有两条二阶曲线都经过 $H_1, K_1, H_2, K_2$ 四点，其中一条是 $\Gamma$，另一条是两直线 $H_1K_1, H_2K_2$ 合成的退化二阶曲线. 过四点 $H_1, K_1, H_2, K_2$ 的二阶曲线束的方程可以写为

$$S_p \cdot S_q + \lambda S = 0. \tag{$*$}$$

将点 $P(p_1, p_2, p_3)$ 的坐标代入 $(*)$，确定出 $\lambda$ 为

$$\lambda = -S_{qp} (= -S_{pq}),$$

故经过五点 $H_1, K_1, P, H_2, K_2$ 的二阶曲线方程为

$$S_p \cdot S_q - S_{pq} \cdot S = 0.$$

易验证点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ 也在此曲线上．证毕.

注意，在应用定理 4.6 时，存在两条相异的退化二阶曲线非常重要．因为两条二阶曲线相交可能出现多重交点的情况．在实际应用中，我们总是希望利用二阶曲线束中的两条相异的退化二阶曲线，而如果二阶曲线束中的非退化二阶曲线出现重数大于 2 的交点，则在这样的二阶曲线束中不存在两条相异的退化二阶曲线，从而失去应用价值.

## 习　题　4.1

1. 求通过五点 $(1,0,-1)$, $(1,0,1)$, $(1,2,1)$, $(1,2,-1)$, $(1,3,0)$ 的二阶曲线方程.

2. 求通过五点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(a_1,a_2,a_3)$ 的二阶曲线方程.

3. 求通过点 $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$, 且以 $x_1 - x_3 = 0$ 和 $x_2 - x_3 = 0$ 为切线的二阶曲线方程.

4. 求由下列射影线束生成的二阶曲线方程：

(1) $x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_3 = 0$ 与 $x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda'(x_1 - 4x_2 + x_3) = 0$, 且 $\lambda - \lambda' = 0$;

(2) $x_1 + 2x_2 + \lambda(x_1 - x_3) = 0$ 与 $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda'(x_2 - 2x_3) = 0$, 且 $2\lambda\lambda' + \lambda - 2\lambda' + 3 = 0$.

5. 如图 4.7, 设三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 同时外切于一条二次曲线．求证它们也同时内接于一条二次曲线.

6. 证明上题的逆命题成立.

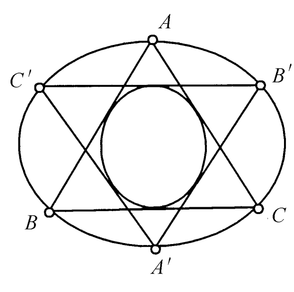



图 4.7

7. 设已知两条二次曲线 $\Gamma$ 与 $\Gamma'$ 以及内接于 $\Gamma$ 并同时外切于 $\Gamma'$ 的一个三点形．试讨论是否存在其他三点形也满足此条件，若存在，有多少？

8. 设点 $P(p_1, p_2, p_3)$ 在二阶曲线 $\Gamma$：$x_2^2 - 2px_1x_3 = 0$ 上．求通过 $P$ 的 $\Gamma$ 的切线方程.

9. 设给定二级曲线 $u_1^2+u_2^2-17u_3^2=0$ 与直线 $[1,4,1]$. 求曲线在此直线上的切点.

10. 求证：下列的点坐标方程与线坐标方程表示同一条曲线.

(1) $x_2^2=2px_1x_3$ 与 $u_2^2=\dfrac{2}{p}u_1u_3$;

(2) $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=x_3^2$ 与 $au_1^2+bu_2^2=u_3^2$;

(3) $x_1x_3-x_2^2=0$ 与 $4u_1u_3-u_2^2=0$;

(4) $x_1x_2=c^2x_3^2\,(c\neq 0)$ 与 $4c^2u_1u_2=u_3^2$.

## §4.2 Pascal 定理和 Brianchon 定理

本节讨论与二次曲线有关的两个古老而著名的定理，在几何证明题和作图题中都有重要的应用. 在这两个定理中，涉及到二次曲线的内接简单六点形和外切简单六线形及其极限情况. 所谓内接简单六点形是指以二阶曲线上的点为顶点构成的简单六点形；而外切简单六线形则是以二级曲线上的直线为边构成的简单六线形.

在应用中，还涉及到简单六点形的对边和简单六线形的对顶概念. 由对偶原则，我们只讨论简单六点形的对边. 对于简单六点形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 我们规定其三双 **对边** 分别为 $A_1A_2$ 与 $A_4A_5$； $A_2A_3$ 与 $A_5A_6$； $A_3A_4$ 与 $A_6A_1$.

### 一、 Pascal 定理和 Brianchon 定理

**定理 4.7**(Pascal 定理) 内接于非退化二阶曲线 $\Gamma$ 的简单六点形的三双对边的交点共线，称为 Pascal **线**.

**定理 4.7′**(Brianchon 定理) 外切于非退化二级曲线 $\Gamma'$ 的简单六线形的三双对顶的连线共点，称为 Brianchon **点**.

**证明** 我们只证明定理 4.7. 如图 4.8, 设简单六点形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内接于非退化二阶曲线 $\Gamma$. 设 $A_1A_2\times A_4A_5=L$, $A_2A_3\times A_5A_6=M$, $A_3A_4\times A_6A_1=N$. 将 $A_1,A_3$ 分别与其余四点连结，由推论 4.3 有

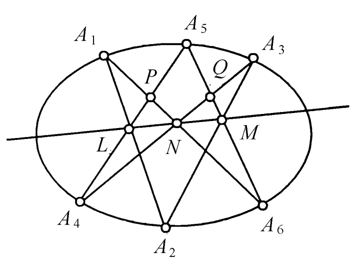



图 4.8

$$A_1(A_2,A_4,A_5,A_6)\overline{\wedge}A_3(A_2,A_4,A_5,A_6).$$

又设 $A_1A_6 \times A_4A_5 = P$, $A_3A_4 \times A_5A_6 = Q$. 则

$$A_1(A_2, A_4, A_5, A_6)\overline{\overline{\wedge}}(L, A_4, A_5, P), \quad A_3(A_2, A_4, A_5, A_6)\overline{\overline{\wedge}}(M, Q, A_5, A_6).$$

于是

$$(L, A_4, A_5, P)\overline{\wedge}(M, Q, A_5, A_6).$$

注意到其中 $A_5$ 自对应，所以

$$(L, A_4, A_5, P)\overline{\overline{\wedge}}(M, Q, A_5, A_6).$$

于是 $LM, A_4Q, PA_6$ 三线共点，即 $L, M, N$ 三点共线.

在上述定理的证明中，我们思考反向的问题. 若已知 $L, M, N$ 三点共线，将证明过程反推回去，即可得到

$$A_1(A_2, A_4, A_5, A_6)\overline{\wedge}A_3(A_2, A_4, A_5, A_6).$$

这说明该简单六点形的六个顶点在同一条二阶曲线上. 从而得到上述定理的逆定理如下.

**定理 4.8** 若一个简单六点形的三双对边的交点共线, 则此六点形内接于一条二阶曲线 $\varGamma$.

**定理 4.8′** 若一个简单六线形的三双对顶的连线共点, 则此六线形外切于一条二级曲线 $\varGamma'$.

运用定理 4.8 可以进行二阶曲线的作图.

**例 4.6** 已知平面上五个点 $A, B, C, D, E$(其中无三点共线). 求作由此五点所确定的二阶曲线 $\varGamma$ 上任一点 $F$.

**解** 作法：(1) 连结 $AB, DE$ 交于 $L$. 过 $L$ 任作直线 $p$(不过已知点).

(2) 连结 $BC$ 交 $p$ 于 $M$, 连结 $CD$ 交 $p$ 于 $N$.

(3) 连结 $EM$ 交 $AN$ 于 $F$ 为所求.

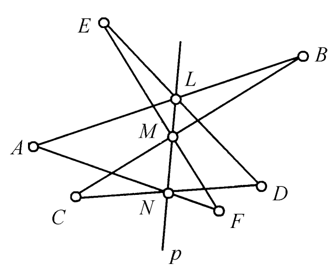



图 4.9

证明：考察简单六点形 $ABCDEF$, 因为其三双对边的交点 $L, M, N$ 共线于 $p$, 据 Pascal 定理的逆定理 4.8, 六点形 $ABCDEF$ 内接于一条二阶曲线 $\Gamma$. 变动直线 $p$, 即可得到 $\Gamma$ 上的其他点.

## 二、 Pascal 定理的极限形式

我们仅讨论 Pascal 定理的极限形式，由对偶原则，不难得到 Brianchon 定理的极限形式. 所谓极限形式, 是指二阶曲线的内接简单六点形有某些相邻顶点重合的情况，显然，当两个相邻顶点重合时，连结这两个顶点的边变为二阶曲线的一条切线.

1. 一对相邻顶点重合

**定理 4.9** 内接于非退化二阶曲线 $\Gamma$ 的简单五点形某点处的切线与其对边的交点必在其余两对不相邻边交点的连线上.

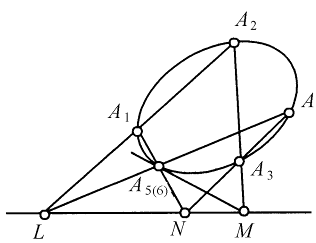



图 4.10

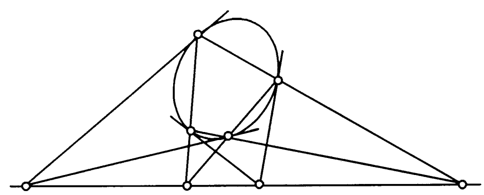


图 4.11

2. 两对相邻顶点重合

**定理 4.10** 内接于非退化二阶曲线的简单四点形两组对边的交点和两组对顶处切线的交点必四点共线.

**定理 4.11** 内接于非退化二阶曲线的简单四点形一对对边的交点与另一对对边各与相应顶点处切线的交点三点共线.

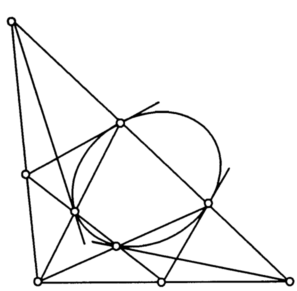


图 4.12

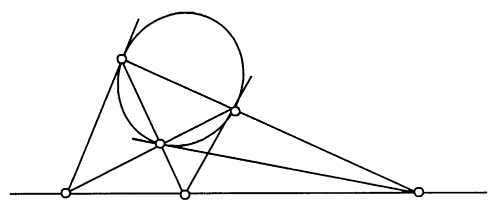


图 4.13

3. 三对相邻顶点重合

**定理 4.12** 内接于非退化二阶曲线的三点形各顶点处的切线与对边的交点三点共线.

当一条二阶曲线退化为两条直线时，只要将简单六点形的六个顶点依次交错地排列在这两直线上， Pascal 定理就退化为 Pappus 定理．所以，可以把 Pappus 定理看成是 Pascal 定理在曲线退化时的特例.

定理 4.9 可以应用于求作二阶曲线上已知点处的切线.

**例 4.7** 已知二阶曲线 $\Gamma$ 以及 $\Gamma$ 上一点 $P$ ，求作 $\Gamma$ 在点 $P$ 处的切线.

作法： (1) 在 $\Gamma$ 上任取不同于 $P$ 的相异四点 $A_1, A_2, A_3, A_4$;

(2) 作 $A_1A_2$ 与 $A_4P$ 的交点 $L$ ， $A_3A_4$ 与 $A_1P$ 的交点 $N$ ；

(3) 连 $LN$ 交 $A_2A_3$ 于 $M$ ；

(4) 连 $PM$ 即为所求点 $P$ 处的切线 (如图 4.14).

**证明** (略).

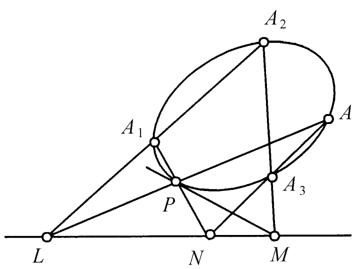



图 4.14

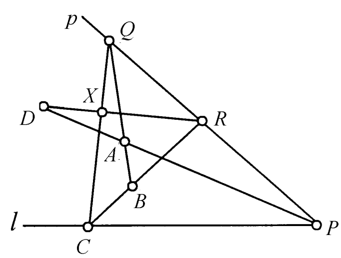



图 4.15

Pascal 定理和 Brianchon 定理对于证明共线点与共点线问题也十分重要.

**例 4.8** 已知四个点 (其中无三点共线) 及过其中一点的直线，试作过这四点且与已知直线相切的二阶曲线上的其余点.

分析：已知四点 $A, B, C, D$(无三点共线) 及过点 $C$ 的直线 $l$, 则由此五个条件可以确定一条非退化二阶曲线 $\Gamma$ 使它过点 $A, B, C, D$ 且与 $l$ 相切于 $C$.

运用 Pascal 定理极限形式的逆定理，把 $C$ 看成两个重合的点，将所求的点 $X$ 看成第六点．如果考虑六点形 $DABCCX$, 则三双对边的交点为

$$DA \times CC(l) = P, \quad AB \times CX = Q, \quad BC \times DX = R,$$

为共线三点.

作法：如图 4.15

(1) 作 $AD \times l = P$;

(2) 过 $P$ 任作一条 Pascal 线 $p(\neq l)$;

(3) 作 $AB \times p = Q$, $BC \times p = R$;

(4) 则 $CQ \times DR = X$ 为所求.

证明：根据 Pascal 定理的极限形式 (五点形) 之逆定理，因为 $P, Q, R$ 三点共线, 所以 $X$ 位于过 $A, B, C, D$ 四点且与 $l$ 切于 $C$ 的二阶曲线上. 由于这里的 Pascal 线是任意作的，所以每作一条直线 $p$ 就可以获得曲线上的一个点.

**例 4.9** 如图 4.16, 已知三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 内接于圆，又

$$AB \times A'B' = X, \quad BC \times B'C' = Y, \quad CA' \times C'A = Z.$$

求证： $X, Y, Z$ 三点共线.

**证明** 考察圆的内接简单六点形 $ABCA'B'C'$, $X, Y, Z$ 恰为其三双对边的交点. 根据 Pascal 定理有， $X, Y, Z$ 三点共线.

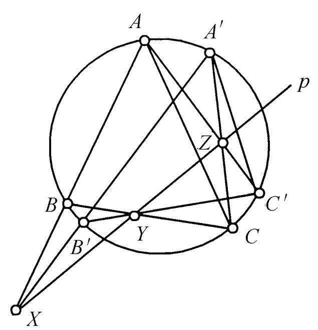



图 4.16

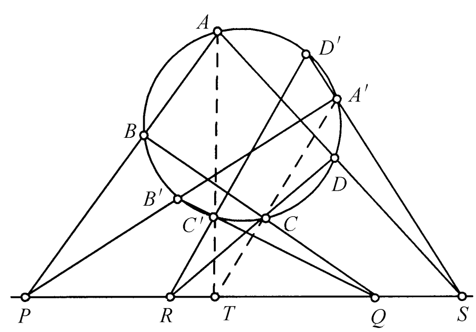



图 4.17

**例 4.10** 内接于圆的两个四点形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$, 设交点 $AB \times A'B' = P$, $BC \times B'C' = Q$, $CD \times C'D' = R$ 在同一直线上，则交点 $DA \times D'A' = S$ 也在此直线上 (如图 4.17).

**证明** 圆是非退化二阶曲线, 先考虑内接简单六点形 $ABCA'B'C'$，它的三双对边的交点为

$$AB \times A'B' = P, \qquad BC \times B'C' = Q, \qquad CA' \times C'A = T.$$

由 Pascal 定理知， $P, Q, T$ 三点共线.

再考虑内接简单六点形 $ADCA'D'C'$ ，同理可得 $S, R, T$ 三点共线，又已知 $P, Q, R$ 三点共线，所以 $P, Q, R, S$ 共线.

## 习 题 4.2

1. 试讨论：对于二阶曲线上取定的六个点，按其不同的次序可以得到多少条不同的 Pascal 线？

2. 分别证明定理 4.9～ 定理 4.12.

3. 分别写出定理 4.9～ 定理 4.12 的对偶命题.

4. 设共面的三点形 $ABC$ 与 $A'B'C'$ 是透视的 (如图 4.18). 求证：六直线 $AB'$, $AC'$, $BC'$, $BA'$, $CA'$, $CB'$ 属于同一条二级曲线.

5. 设 $A, B$ 在二阶曲线 $\Gamma$ 上， $C, D$ 不在 $\Gamma$ 上， $AC, BD$ 分别交 $\Gamma$ 于 $P, Q$; $AD, BC$ 分别交 $\Gamma$ 于 $U, V$(如图 4.19). 求证： $CD, PQ, UV$ 三直线共点.

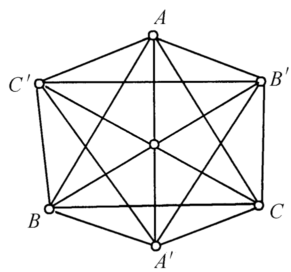



图 4.18

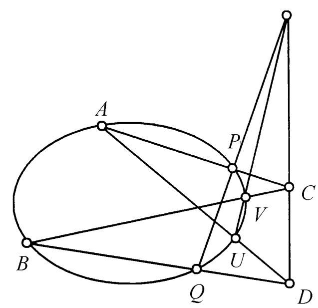



图 4.19

6. 设 $A, B, C, D$ 为二阶曲线 $\Gamma$ 上的四个定点， $P, Q$ 为 $\Gamma$ 上的动点， $PA \times DC = X$, $PB \times QD = Y$. 求证： $XY$ 过定点. （你做出本题了吗？如果没有，你能够做点什么吗？）

## §4.3 配 极 变 换

为了进一步研究二次曲线，我们引入一个极其重要的工具 —— 配极变换. 本节的讨论以二阶曲线为主，由对偶原则不难得到关于二级曲线的类似讨论. 事实上，配极变换对于平面射影几何几乎可以起到 “统揽全局” 的作用，我们可以由配极变换维系射影几何的几乎所有内容. 本节总假定所论二次曲线是非退化的.

### 一、极点与极线

**定义 4.6** 如果平面上相异二点调和分离其连线与二阶曲线 $\Gamma$ 的两个交点，则称此二点为关于 $\Gamma$ 的一对 **共轭点**.

**定理 4.13** 点 $P(p_i)$ 关于二阶曲线 $\Gamma$ 共轭点的轨迹为一直线 $p$, 方程为 $S_p = 0$.

**证明** 设二阶曲线

$$\Gamma: \quad S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), |(a_{ij})| \neq 0,$$

又设 $P(p_1, p_2, p_3)$ 为定点， $Q(q_1, q_2, q_3)$ 为另一点 $(Q \notin \Gamma)$. 则直线 $PQ$ 上任一点的坐标可以写成

$$x_i = p_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

$PQ$ 与 $\Gamma$ 的交点 $M(\xi_i = p_i + \lambda q_i)$ 满足方程

$$S_{qq}\lambda^2 + 2S_{pq}\lambda + S_{pp} = 0. \tag{4.15}$$

因为 $P, Q$ 均不在 $\Gamma$ 上，故 $S_{pp} \neq 0, S_{qq} \neq 0$, 从而方程 (4.15) 必有两个根，分别决定了 $PQ$ 与 $\Gamma$ 的两个交点 $M_i(p + \lambda_i q)\,(i = 1, 2)$. 从而， $P, Q, M_1, M_2$ 调和共轭 $\Longleftrightarrow \lambda_1/\lambda_2 = -1$, 即 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, 亦即 $S_{pq} = 0$. 于是 $S_{pq} = 0$ 为点 $P, Q$ 关于二阶曲线 $\Gamma$ 共轭的充要条件. 将 $q_i$ 改写为 $x_i$ 即得 $P$ 关于 $\Gamma$ 的共轭点的轨迹为一直线 $p$, 方程为 $S_p = 0$.

**推论 4.5** 两点 $P, Q$ 关于二阶曲线 $\Gamma$ 共轭的充要条件为 $S_{pq} = 0$, 即

$$(p_1, p_2, p_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.16}$$

**定义 4.7** 设 $P$ 为平面上一点， $\Gamma$ 为二阶曲线. 若 $P$ 不在 $\Gamma$ 上，则称 $P$ 关于 $\Gamma$ 的共轭点的轨迹直线 $p$ 为 **点 $P$ 关于 $\Gamma$ 的极线**; 若 $P$ 在 $\Gamma$ 上，则称 $\Gamma$ 在 $P$ 处的切线 $p$ 为 $P$ **关于 $\Gamma$ 的极线**, 反之，称点 $P$ 为直线 $p$ **关于 $\Gamma$ 的极点**.

由推论 4.5, 我们可以给出定义 4.6 的等价形式.

**定义 4.6′** 设 $\Gamma$ 为平面上一条非退化二阶曲线. 称相互在对方极线上的两点为关于 $\Gamma$ 的一对共轭点.

**推论 4.6** 平面上任一点 $P$ 关于二阶曲线 $\Gamma$ 的极线惟一存在, 方程为 $S_p = 0$. 反之，平面上任一条直线 $p$ 关于 $\Gamma$ 的极点惟一存在.

**证明** 只要证明后一半结论. 设有直线 $u: \quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, 我们来求其极点. 假设 $P(p_i)$ 为 $u$ 的一个极点. 因为 $P$ 有惟一极线为 $S_p = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3 = 0,$$

据假设， $u$ 也是 $P$ 的极线，故 $u$ 与 $S_p=0$ 为同一直线．即

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)_p=\rho u_i,\qquad \rho\neq 0, i=1,2,3,$$

即

$$\begin{cases}\rho u_1=a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3,\\ \rho u_1=a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3,\\ \rho u_1=a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3,\end{cases}\qquad |a_{ij}|\neq 0.\tag{4.17}$$

方程组 (4.17) 称为 **极点方程组**, 实际上是同底点场与线场之间的一个非奇异线性变换．非退化条件 $|a_{ij}|\neq 0$ 说明关于 $\Gamma$ 的极点和极线的对应是一个双射.

利用定义 4.6′, 可以对偶地给出下列定义.

**定义 4.8** 相互通过对方极点的两直线称为关于二阶曲线 $\Gamma$ 的 **共轭直线**.

利用 Maclaurin 定理及对偶原则，立即可得，两直线 $p[p_1,p_2,p_3]$, $q[q_1,q_2,q_3]$ 关于非退化二阶曲线 $\Gamma:S=0$ 共轭 $\Longleftrightarrow$

$$(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{12}&A_{22}&A_{23}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=0,\tag{4.18}$$

其中 $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 在 $(a_{ij})$ 中的代数余子式，这恰好是这两直线关于 $\Gamma$ 的对应二级曲线 $T\equiv 0$ 共轭的解析条件 $T_{pq}=0$.

**例 4.11** 已知二阶曲线 $\Gamma$ :

$$3x_1^2+5x_2^2+x_3^2+7x_1x_2+4x_1x_3+5x_2x_3=0.$$

(1) 求点 $P(1,-1,0)$ 关于 $\Gamma$ 的极线;

(2) 求直线 $p[0,1,0]$ 关于 $\Gamma$ 的极点.

**解** 容易验证，所给二阶曲线 $\Gamma$ 为非退化二阶曲线.

(1) 因为 $\Gamma$ 的方程可写为

$$S\equiv(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&7/2&2\\7/2&5&5/2\\2&5/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

所以极线方程为 $S_p=0$, 即

$$(1,-1,0)\begin{pmatrix}3&7/2&2\\7/2&5&5/2\\2&5/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即 $x_1+3x_2+x_3=0$.

(2) 法一. 所求的极点坐标满足下列方程组:

$$\rho\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7/2&2\\7/2&5&5/2\\2&5/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

解得极点坐标为 $(3,-2,-1)$.

法二. 先将二阶曲线的方程化为线坐标方程, 再由线坐标方程出发, 求直线 $p[0,1,0]$ 的极点, 具体过程请读者自行完成.

### 二、配极变换

由上述讨论, 任一条非退化二阶曲线 $\Gamma$ 通过极点与极线的关系规定了同底点场与线场间的一个双射. 我们规范地给出这个规律的定义如下.

**定义 4.9** 在射影平面上, 称由变换式

$$\rho u_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j. \qquad a_{ij}=a_{ji},(i=1,2,3),|a_{ij}|\neq 0 \tag{4.19}$$

决定的同底点场与线场之间的变换为关于二阶曲线 $\Gamma: S\equiv\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0\ (|a_{ij}|\neq 0)$ 的 **配极变换**.

显然, 配极变换是点的集合与直线的集合之间的变换, 称为异素变换. 异素射影变换也称为 **对射**, 而以前所讨论的射影变换是同素射影变换, 也称为 **直射**. 配极变换有着非常重要的应用, 以下我们讨论配极变换的基本性质.

**定理 4.14**(配极原则) 点 $P$ 关于二阶曲线 $\Gamma$ 的极线 $p$ 经过点 $Q\iff$ 点 $Q$ 关于 $\Gamma$ 的极线 $q$ 经过点 $P$; 直线 $p$ 关于 $\Gamma$ 的极点 $P$ 在直线 $q$ 上 $\iff$ 直线 $q$ 关于 $\Gamma$ 的极点 $Q$ 在直线 $p$ 上.

**证明** 只证明定理的前半. 设 $\Gamma: S=0$, $P(p_i),Q(q_i)$. $P$ 的极线经过点 $Q\iff S_{pq}=0$. 但是 $S_{pq}=S_{qp}$, 故 $S_{qp}=0\iff Q$ 的极线经过点 $P$.

**推论 4.7** 两点连线的极点是这二点的极线的交点; 两直线交点的极线是这二直线的极点的连线.

**证明** 设 $A,B$ 两点连线的极点为 $C$, 这等价于 $C$ 的极线为 $AB$. 因为 $C$ 的极线通过 $A$ 和 $B$, 根据配极原则有点 $A$ 和 $B$ 的极线均通过点 $C$. 从而 $A,B$ 的极线交于点 $C$.

**推论 4.8** 共线点的极线必共点; 共点线的极点必共线.

**证明** 设点 $A, B, C, \cdots$ 共线于 $p$, 且直线 $p$ 的极点为 $P$. 因为 $A \in p$, 所以点 $P$ 的极线过 $A$ ，由配极原则知，点 $A$ 的极线必过点 $P$, 其余同理可证. 从而共线点的极线必共点.

后一结论为前者的对偶，当然成立.

**推论 4.9** 关于非退化二阶曲线的配极变换使得平面上一个点列对应于一个线束，一个图形对应于其对偶图形.

**推论 4.10** 关于非退化二阶曲线的配极变换使得共线四点的交比等于其对应四直线的交比. 因此, 配极变换确定了平面上一个点列与其对应线束之间的一个射影对应.

综上, 我们由关于非退化二阶曲线的配极变换出发, 实际上得到了平面上的一种对偶原则, 称为 **配极对偶原则**. 从代数的观点看，它是比我们以前所使用的代数对偶更为一般的代数对偶原则.

**定义 4.10** 若一个三点形的每个顶点关于一条非退化二阶曲线 $\Gamma$ 的极线是其对边，则称这个三点形为关于 $\Gamma$ 的一个 **自极三点形**.

由配极原则，二阶曲线的自极三点形的任一顶点都不在二阶曲线上.

**定理 4.15** 顶点在非退化二阶曲线 $\Gamma$ 上的完全四点形的对边三点形为关于 $\Gamma$ 的一个自极三点形.

**证明** 如图 4.20, 在完全四点形 $ABCD$ 中有， $(BC, EX) = -1, (AD, FX) = -1$, 所以， $E, F$ 在 $X$ 的极线上，即 $X$ 的极线为 $YZ$.

同理可证 $Y$ 的极线为 $XZ$, $Z$ 的极线为 $XY$.

**例 4.12** 如图 4.21, $ABC$ 是二阶曲线 $\Gamma$ 的自极三点形，弦 $RP$ 通过 $B$ ， $RC$ 与曲线的另一个交点为 $Q$. 求证： $PQ$ 通过 $A$.

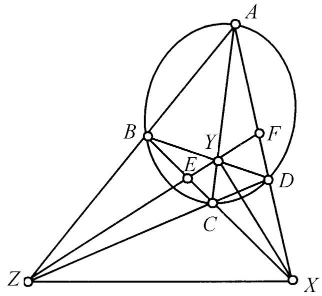



图 4.20

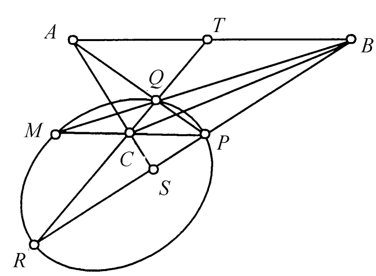



图 4.21

**证法一** 设 $AC, RQ$ 分别交 $RB$, $AB$ 于 $S, T$; 因 $ABC$ 为自极三点形，所以

$$(BS, RP) = -1, \qquad (TC, RQ) = -1.$$

因此，有

$$(B,S,R,P) \;\overline{\wedge}\; (T,C,R,Q).$$

又因为上述两个射影点列底的交点 $R$ 为自对应点，所以

$$(B,S,R,P) \;\overset{=}{\wedge}\; (T,C,R,Q).$$

从而 $BT,SC,PQ$ 共点，而 $BT$ 与 $SC$ 的交点即为 $A$，故 $PQ$ 也通过 $A$.

**证法二** 连结 $PC$ 交 $\varGamma$ 于 $M$, 则 $C$ 为 $\varGamma$ 的内接完全四点形 $PQMR$ 的一个对边点，设 $RP \times MQ = B'$(对边点).

由定理 4.15, $C$ 的极线必过 $B'$, 而已知 $C$ 的极线为 $AB$, 故 $B' \in AB$, 这样 $B$ 与 $B'$ 都是 $AB$ 与 $RP$ 的公共点，即 $B \equiv B'$, 所以 $MQ$ 必过点 $B$.

**例 4.13** 已知平面上一点 $P$ 和非退化二阶曲线 $\varGamma$，求作 $P$ 关于 $\varGamma$ 的极线 $p$.

**解** 情形 1. 点 $P$ 在 $\varGamma$ 上.

$p$ 即为 $\varGamma$ 在 $P$ 处的切线，问题化为前节的利用 Pascal 定理作切线的作图.

情形 2. 点 $P$ 不在 $\varGamma$ 上.

**作法** (1) 过 $P$ 任作二直线，分别交 $\varGamma$ 于 $A,B,C,D$(如图 4.22).

(2) 连结 $BC,AD$ 交于 $R$, 连结 $AC,BD$ 交于 $Q$;

(3) 连结 $QR$ 即为所求极线 $p$.

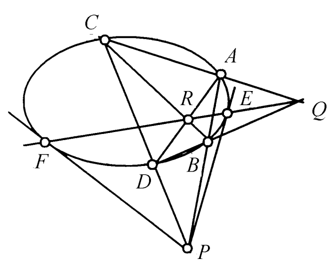



图 4.22

**证明** 利用定理 4.15 直接可得.

在图 4.22 中，设直线 $QR$ 交 $\varGamma$ 于 $E,F$. 则连 $PE,PF$ 为过 $\varGamma$ 外一点 $P$ 的两条切线，这样我们又得到了过二阶曲线外一点求作这曲线的切线的另一种方法.

**例 4.14** 已知平面上一直线 $p$ 及非退化二阶曲线 $\varGamma$, 求作 $p$ 关于 $\varGamma$ 的极点.

**解** 我们只给出作法梗概，请读者自行作图并证明.

情形 1. $p$ 与 $\varGamma$ 不相切.

**作法** 在直线 $p$ 上任取不在 $\varGamma$ 上的相异二点 $A,B$，分别作出它们的极线 $a,b$, 则 $a,b$ 的交点 $P$ 即为所求.

情形 2. $p$ 与 $\Gamma$ 相切.

**作法** 在 $p$ 上任意取定不在 $\Gamma$ 上的一点 $A$, 按上例作出 $A$ 关于 $\Gamma$ 的极线 $GF$, 则 $GF$ 与 $p$ 的交点即为 $p$ 关于 $\Gamma$ 的极点 (即切点).

## 习 题 4.3

1. 验证下列点偶是关于所给非退化二阶曲线的共轭点.

(1) 点偶 $(1,0,1),(6,1,0)$ 关于 $3x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3-6x_2x_3+10x_3^2=0$;

(2) 点偶 $(3,3,1),(3,0,1)$ 关于 $2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+6x_2x_3-3x_3^2=0$;

(3) 点偶 $(0,3,1),(1,0,1)$ 关于 $4x_1^2+2x_1x_2-6x_1x_3-10x_2x_3+15x_3^2=0$;

(4) 点偶 $(1,-1,0),(1,0,-1)$ 关于 $3x_1^2+7x_1x_2+5x_2^2+4x_1x_3+5x_2x_3+x_3^2=0$.

2. 求下列各点关于给定二阶曲线的极线.

(1) 点 $(5,1,7)$ 关于 $2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3=0$;

(2) 点 $(6,4,1)$ 关于 $2x_1^2+6x_2^2+6x_1x_3-2x_2x_3=0$.

3. 求下列直线关于给定二阶曲线的极点.

(1) 直线 $3x_1-x_2+6x_3=0$ 关于 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+6x_2x_3=0$;

(2) 直线 $x_1-x_2+3x_3=0$ 关于 $2x_1^2-3x_2^2-5x_3^2+6x_1x_2+3x_1x_3+16x_2x_3=0$.

4. 如图 4.23, $ABCD$ 是二阶曲线 $\Gamma$ 的内接四点形, $XYZ$ 为其对边三点形. 求证: $B,C$ 处的切线与 $YZ$ 共点, $A,D$ 处的切线也与 $YZ$ 共点.

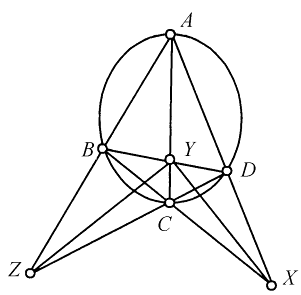



图 4.23

5. 给定一条非退化二阶曲线 $\Gamma$. 证明：在不与 $\Gamma$ 相切的直线上有无穷多组关于 $\Gamma$ 的共轭点偶，它们构成以此直线为底的点列上的一个对合. 试问，此对合的不变元素是什么？

6. 设非退化二阶曲线 $\Gamma$ 上的动点 $X,Y$ 处的切线交点在一条定直线上. 证明：动直线 $XY$ 经过一个定点.

7. 给定两条二阶曲线 $\Gamma_1: Ax_1^2=2x_2x_3$, $\Gamma_2: 2x_1x_2=Ax_3^2$. 试求一点，使其关于两条二阶曲线的极线为同一条直线.

8. 求 $x^2+y^2=k^2$ 的动切线关于 $ax^2+by^2=1$ 的极点的轨迹.

## §4.4 二次曲线的射影分类

本节讨论在射影变换群下，二阶曲线的等价类．为讨论退化二阶曲线，首先研究关于二阶曲线的奇异点概念．

### 一、二阶曲线的奇异点

**定义 4.11** 若点 $P_0(p_i^0)$ 的坐标是方程组

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}, i = 1,2,3, \text{秩}(a_{ij}) \geqslant 1$$

的非零解，则称 $P_0$ 为二阶曲线 $\varGamma : S \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0$ 的一个 **奇异点**.

显然，$\varGamma$ 有奇异点的充要条件是 $\varGamma$ 为退化的二阶曲线．而且，$\varGamma$ 的奇异点一定在 $\varGamma$ 上．由线性代数知识可以看出，退化二阶曲线的奇异点个数与其矩阵的秩有关，秩为 2, 有惟一奇异点；秩为 1 则有无穷多奇异点，并构成一条直线．如果我们将极点和极线的定义应用于退化二阶曲线，则此时的配极不再是一个双射．可以证明，对于平面上任一点 $P$, 其极线 $S_p = 0$ 必定过奇异点 $P_0$; 不经过 $P_0$ 的直线的极点可以取作为 $P_0$. 这样，在关于退化二阶曲线的配极下，奇异点 $P_0$ 对应着无穷多的极线 (为不过 $P_0$ 的直线); 过 $P_0$ 的直线对应着无穷多的极点 (在经过 $P_0$ 的另一条直线上).

**定理 4.16** 二阶曲线上一点是奇异点的充要条件是该点与曲线上任意点连线上的点皆在此二阶曲线上.

**证明** "必要性"．设 $P(p_1, p_2, p_3)$ 是二阶曲线 $\varGamma : S = 0$ 上的奇异点，点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ 在 $\varGamma$ 上, 且 $P \neq Q$. 于是 $PQ$ 上任一点的齐次坐标可表为 $(p_i + \lambda q_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. $PQ$ 与 $\varGamma$ 的交点的坐标参数 $\lambda$ 应满足方程

$$S_{qq}\lambda^2 + 2S_{pq}\lambda + S_{pp} = 0. \tag{4.20}$$

因为 $P$ 是奇异点，即 $\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}p_j = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. 所以有 $S_{pp} = 0, S_{pq} = 0$. 又因为 $Q \in \varGamma$, 故 $S_{qq} = 0$. 这说明，对于 $\lambda$ 的一切值， (4.20) 式均成立，即 $PQ$ 上的任一点都在 $\varGamma$ 上.

"充分性". 设 $P(p_1, p_2, p_3)$ 是 $\varGamma$ 上一点, 又 $Q(q_1, q_2, q_3)$ 为 $\varGamma$ 上任一点 $(Q \neq P)$, 且 $PQ$ 上任一点均在 $\varGamma$ 上，即 (4.20) 对一切 $\lambda$ 成立．从而 $S_{qq} = S_{pp} = S_{pq} = 0$. 由 $S_{pq} = 0$ 有,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p q_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p q_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p q_3 = 0.$$

因为 $Q$ 是 $\varGamma$ 上任一点，下面三式必同时成立

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p=0,\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p=0,\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p=0.$$

由奇异点的定义可见， $P$ 为二阶曲线 $\varGamma$ 的奇异点．证毕.

### 二、二阶曲线的射影分类

由线性代数知识不难看出，二阶曲线的矩阵的秩和二阶曲线有无奇异点以及奇异点的个数均在射影变换下不变，这是二阶曲线射影分类的依据．所谓射影分类，是将平面上的二阶曲线在射影变换群之下分为射影等价类，并对每一个等价类给出其射影标准方程.

设给定二阶曲线

$$\varGamma: S\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0\qquad(a_{ij}=a_{ji}),\tag{4.1}$$

我们分情况来讨论其射影分类问题.

1. $|a_{ij}|\neq 0$ 即 $(a_{ij})$ 的秩为 3

此时 $\varGamma$ 为非退化的，必存在自极三点形．任取定 $\varGamma$ 的一个自极三点形 $A_1'A_2'A_3'$ 作为新的坐标三点形，设三个顶点在原坐标系下的坐标依次为 $A_1'(p_i), A_2'(q_i), A_3'(r_i)$. 取点 $E'(p_i+q_i+r_i)$ 为单位点建立新的射影坐标系，由 §1.3 的 (1.10) 式，可直接写出射影坐标变换的逆式为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\\p_3&q_3&r_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},\tag{1.10}$$

因为射影坐标变换也是射影变换，将上述坐标变换式代入 (4.1) 式可得

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}'x_i'x_j'=0\qquad(a_{ij}'=a_{ji}'),\tag{4.21}$$

因为在新坐标系下 $A_1'(1,0,0)$ 的对边 $A_2'A_3'$ 的方程为

$$x_1'=0.\tag{4.22}$$

另一方面， $A_1'(1,0,0)$ 的极线为

$$a_{11}'x_1'+a_{12}'x_2'+a_{13}'x_3'=0.\tag{4.23}$$

因为 (4.22) 与 (4.23) 表示同一直线，所以有

$$a'_{12}=0,\quad a'_{13}=0,\quad a'_{11}\neq 0.$$

同理可得

$$a'_{23}=0,\quad a'_{22}\neq 0,\quad a'_{33}\neq 0,$$

所以 (4.21) 式应化为

$$a'_{11}x'^2_1+a'_{22}x'^2_2+a'_{33}x'^2_3=0. \tag{4.24}$$

再作仅改变单位点的射影坐标变换

$$\rho x'_i=\frac{1}{\sqrt{|a'_{ii}|}}x''_i\qquad(i=1,2,3),$$

可将 (4.24) 进一步化为

$$\pm x''^2_1\pm x''^2_2\pm x''^2_3=0. \tag{4.25}$$

注意到 $x_1,x_2,x_3$ 三个射影坐标分量的地位平等，所以上述方程只有下列两种情况

$$\begin{aligned}&x''^2_1+x''^2_2-x''^2_3=0,\\&x''^2_1+x''^2_2+x''^2_3=0.\end{aligned} \tag{4.26}$$

称方程 (4.26) 中的第一式为实二阶曲线，也称为长圆曲线；第二个方程表示的曲线为虚二阶曲线，其上没有实点，也称为零曲线.

2. $|a_{ij}|=0$ 且 $(a_{ij})$ 的秩为 2

此时， $\varGamma$ 为具有惟一奇异点的退化二阶曲线. 取奇异点作为新坐标三点形的顶点，设其在原坐标系下的坐标为 $A'_3(r_i)$. 任取不在曲线上的一点为 $A'_2(q_i)$, 再于 $A'_2$ 的极线 (过 $A'_3$ 的另一直线) 上任取异于 $A'_3$ 的一点为 $A'_1(p_i)$. 取 $E'(p_i+q_i+r_i)$ 为新的单位点，建立射影坐标系，同上可以写出射影坐标变换的逆式. 此时，由于 $\varGamma$ 只有一个奇异点，据定理 4.16, $\varGamma$ 退化为交于奇异点的两条直线，对于新坐标系而言， $\varGamma$ 即为过新坐标三点形的顶点 $A'_3$ 的两条直线. 所以，将坐标变换的逆式代入 (4.1) 之后，必可化为

$$a'_{11}x'^2_1+a'_{22}x'^2_2=0. \tag{4.27}$$

再作坐标变换

$$\begin{cases}\rho x'_i=\dfrac{1}{\sqrt{|a'_{ii}|}}x''_i\qquad(i=1,2),\\ \rho x'_3=x''_3,\end{cases}$$

方程 (4.27) 化为

$$\pm x_1''^2 \pm x_2''^2 = 0. \tag{4.28}$$

由于 $x_1, x_2$ 地位相同，(4.28) 式只有下述两种情况

$$x_1''^2 - x_2''^2 = 0,$$

$$x_1''^2 + x_2''^2 = 0.$$

上述第一个方程表示两条实直线 $x_1'' + x_2'' = 0$ 和 $x_1'' - x_2'' = 0$; 而第二个方程表示两条共轭虚直线 $x_1'' + \mathrm{i}x_2'' = 0$ 和 $x_1'' - \mathrm{i}x_2'' = 0$.

3. $|a_{ij}| = 0$ 且 $(a_{ij})$ 的秩为 1

此时二阶曲线 $\Gamma$ 退化，并且含有一条由奇异点构成的直线. 取这条直线为新坐标三点形的一边，比如 $x_1' = 0$, 建立新的射影坐标系. 设在新坐标系下，$\Gamma$ 的方程化为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}' x_i' x_j' = 0, \qquad (a_{ij}' = a_{ji}') \tag{4.29}$$

则由于在新坐标系下，任何坐标形如 $(0, p_2, p_3)(p_2^2 + p_3^2 \neq 0)$ 的点总是奇异点，即其坐标满足 (4.29), 从而在 (4.29) 中必有 $a_{11}' \neq 0, a_{12}' = a_{13}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$. 于是，$\Gamma$ 的方程在新坐标系下化为

$$x_1'^2 = 0. \tag{4.30}$$

这是两条重合实直线.

综上讨论，平面上的二阶曲线可以在射影变换下分为 5 个射影等价类. 列出如下 (为表达方便，我们略去“ $'$ ”和“ $''$ ”):

$$\Gamma : \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \begin{cases} |a_{ij}| \neq 0,\ \text{秩} = 3 \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 & \text{实二阶曲线} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 & \text{虚二阶曲线} \end{cases} \\ |a_{ij}| = 0 \begin{cases} \text{秩}(a_{ij}) = 2 \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 & \text{一对相交实直线} \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{一对共轭虚直线} \end{cases} \\ \text{秩}(a_{ij}) = 1 \quad x_1^2 = 0 \quad \text{一对重合实直线} \end{cases} \end{cases}$$

我们将上述五种形式的方程称为二阶曲线各射影等价类的 **标准方程**. 对于平面上任意一条二阶曲线，必定可以通过射影坐标变换，将其方程化为上述五个标准方程中的一个. 属于同一个射影等价类的二阶曲线，具有相同的标准方程，不属于同一个射影等价类的二阶曲线具有不同的标准方程.

**例 4.15** 求射影坐标变换，将二阶曲线

$$\Gamma: \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_1x_2=0 \tag{$*$}$$

化为射影标准方程.

**解** 首先验证，秩 $(a_{ij})=3$. 故 $\Gamma$ 为一条非退化二阶曲线.

第一步，选取自极三点形.

显然， $P(1,0,0)$ 不在 $\Gamma$ 上 (在满足条件的情况下，可尽量选取坐标数字简单的点), 取其作为第一点. 求出 $P$ 关于 $\Gamma$ 的极线为： $l_p: x_1-3x_2+x_3=0$.

易见， $Q(0,1,3)$ 在 $l_p$ 上但不在 $\Gamma$ 上，取其为第二点 (同样尽量取坐标数字简单的符合条件的点). 求出 $Q$ 关于 $\Gamma$ 的极线为 $l_q: x_2+x_3=0$.

取 $l_p\times l_q=R(4,1,-1)$ 为第三点.

综上，我们得到了 $\Gamma$ 的一个自极三点形 $PQR$.

第二步，求射影坐标变换式.

分别以 $P,Q,R$ 作为新坐标三点形的三个顶点 $A_1',A_2',A_3'$, 并令 $E'(p_i+q_i+r_i)=(5,2,2)$ 作为新坐标三点形的单位点，由 §1.3 的 (1.10) 式，得到射影坐标变换的逆式为

$$\rho\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}.$$

第三步，化标准方程.

将上述坐标变换的逆式代入 $(*)$ 式，化简，得

$$x_1'^2+16x_2'^2-16x_3'^2=0. \tag{$**$}$$

再作变换 $\rho x_1'=x_1'', \rho x_2'=\dfrac{1}{4}x_2'', \rho x_3'=\dfrac{1}{4}x_3''$, 代入 $(**)$ 得

$$x_1''^2+x_2''^2-x_3''^2=0.$$

这就是所求标准方程. 从而所给二阶曲线为非退化实二阶曲线.

## 习 题 4.4

1. 求射影坐标变换，将下列二阶曲线的方程化为射影标准方程.

(1) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3=0$;

(2) $4x_1^2+15x_2^2-5x_3^2+16x_1x_2-8x_1x_3-22x_2x_3=0$;

(3) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$;

(4) $x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3=0$.

2. 如果坐标三点形是由二阶曲线 $\Gamma$ 的两条切线及切点连线构成. 求证: $\Gamma$ 的方程可以写为 $c_1x_1x_3 + c_2x_2^2 = 0$.

3. 如果两条非退化二阶曲线相交于相异四点. 求证：在同一坐标系下，两曲线的方程可以写为 $\Gamma_1 : a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0\,(a_1a_2a_3 \neq 0)$ 与 $\Gamma_2 : b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0\,(b_1b_2b_3 \neq 0)$.

4. 设有二阶曲线 $4x_1^2 - 16x_1x_2 + 16x_2^2 - 2x_1x_3 + 22x_2x_3 + 7x_3^2 = 0$ 与三点 $P(1,0,1)$, $Q(1,-1,0)$, $R(1,1,-1)$.

(1) 证明 $PQR$ 为已知二阶曲线的一个自极三点形.

(2) 以 $PQR$ 为新坐标三点形，求已知二阶曲线的方程.

## §4.5 二次点列上的射影变换

在本节中，我们总假定所论二阶曲线是非退化的. 从二阶曲线出发，讨论二次点列上的射影变换. 对偶地，也可以讨论二次线束上的射影变换.

### 一、二次点列上的射影对应

**定义 4.12** 二阶曲线 $\Gamma$ 上全体点的集合称为一个 **二次点列**, $\Gamma$ 称为这个点列的 **底**. 记作 $\Gamma(A,B,C,\cdots)$, 也可迳记为 $\Gamma$.

**定义 4.12′** 二级曲线 $\Gamma'$ 上全体直线的集合称为一个 **二次线束**, $\Gamma'$ 称为这个线束的 **底**. 记作 $\Gamma'(a,b,c,\cdots)$, 也可迳记为 $\Gamma'$.

相对于二次点列与二次线束，以前讨论的点列与线束就是一次的或线性的.

**定义 4.13** 对于二次点列 $\Gamma$ 上的四点 $A,B,C,D$, 我们仍以通常的记号表示其**交比**, 定义为

$$(AB,CD) = S(AB,CD),$$

其中 $S$ 为 $\Gamma$ 上任一点.

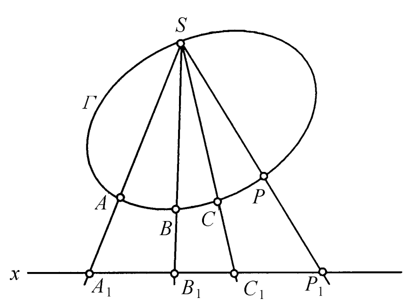



图 4.24

由推论 4.3, 这个定义是合理的. 此外, 如果

$$(AB, CD) = -1,$$

则称 $\varGamma$ 上这四点构成 **调和点组**.

**定义 4.14** 设 $x(P_1)$ 为点列, $S$ 为二次点列 $\varGamma$ 上任一点, 直线 $SP_1$ 交 $\varGamma$ 于点 $P$. 则称线束 $S(P)$ 以及点列 $x(P_1)$ 均与点列 $\varGamma(P)$ 成 **透视对应**. 分别记作 $S(P)\overline{\overline{\wedge}}\varGamma(P)$ 和 $x(P_1)\overline{\overline{\wedge}}\varGamma(P)$.

依射影对应的传递性, 我们可以定义二次点列与点列、线束之间的射影对应, 并仍然采用通常的射影对应记号. 显然, 二次点列与点列、线束间的射影对应是双射而且保交比. 我们更感兴趣的是下面的情况.

**定义 4.15** 如果 $S(P)\overline{\overline{\wedge}}\varGamma(P)$, $S'(P')\overline{\overline{\wedge}}\varGamma'(P')$ 且 $S(P)\barwedge S'(P')$. 则称二次点列 $\varGamma(P)$**射影对应** 于二次点列 $\varGamma'(P')$, 记作 $\varGamma(P)\barwedge\varGamma'(P')$.

显然, $\varGamma(P)\barwedge\varGamma'(P')$ 与上述定义中的点 $S, S'$ 在 $\varGamma, \varGamma'$ 上的选取无关. 而且, 由定义 4.15, 下面的定理 4.17 是显然的.

**定理 4.17** (1) 两个二次点列间的射影对应可由相异的三对对应点惟一确定.

(2) 两个二次点列间的一个双射是射影对应的充要条件是它使任何四点的交比等于其对应四点的交比.

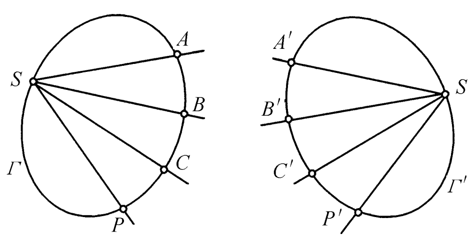



图 4.25

于是, 我们也可以类似地给出二次点列间射影对应的 Steiner 定义. 根据定义 4.15 以及定理 4.17(1), 如果已知两个二次点列间射影对应的三对相异的对应点, 我们可以用作图的方法作出由此确定的射影对应的任一点的对应点.

如图 4.26, 设已知两个二次点列 $\varGamma$ 与 $\varGamma'$ 之间射影对应的相异的三对对应点 $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$, $P$ 为 $\varGamma$ 上任一点. 我们给出求作 $P$ 在 $\varGamma'$ 上的对应点 $P'$ 的作图法. 连结 $AA'$ 分别交 $\varGamma, \varGamma'$ 于点 $S, S'$. 设 $SB \times S'B' = B_0$, $SC \times S'C' = C_0$. 连结 $B_0C_0$. 设 $SP \times B_0C_0 = P_0$. 连结 $S'P_0$ 设其交 $\varGamma'$ 于 $P'$, 则 $P'$ 为所求的对应点.

上述作图的正确性是显然的. 顺便指出, 在图 4.26 中, 直线 $B_0C_0$ 称为 $\varGamma$ 与

$\Gamma'$ 的射影对应的 **透视轴**. 有趣的是，对于同一个射影对应，其透视轴并不惟一存在. 比如在上述作图中，若先连结 $BB'$ 得到其与 $\Gamma$ 和 $\Gamma'$ 的交点 $S, S'$, 则作图中所得的透视轴将是另一条直线 (有兴趣的读者可以研究所有这些透视轴的规律). 但是，无论怎样， $P$ 的对应点 $P'$ 却是惟一存在的.

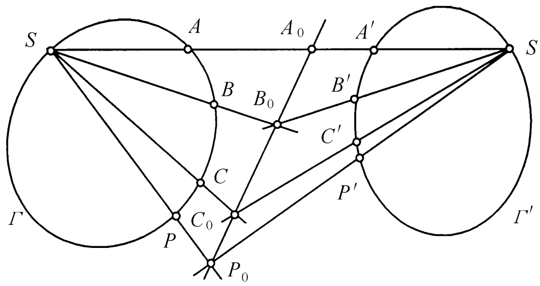



图 4.26

## 二、二次点列上的射影变换

在定义 4.15 中，若 $\Gamma = \Gamma'$, 则称 $\Gamma(P) \barwedge \Gamma(P')$ 为 **二次点列 $\Gamma$ 上的射影变换**. 二次点列上的射影变换具有一些特别的有趣性质.

**定理 4.18**(Steiner)　设 $f$ 为二次点列 $\Gamma$ 上的一个非恒同的射影变换. 则存在惟一直线 $p_0$, 使得对于 $f$ 的任何两对对应点 $A, A'; B, B'$, 都有点 $P_{AB} = AB' \times A'B$ 在直线 $p_0$ 上.

**证明**　如图 4.27, 设在 $\Gamma$ 上 $A \neq B$. 则 $A' = f(A)$ 与 $B' = f(B)$ 互异. 另在 $\Gamma$ 上取点 $C$(不妨设 $C$ 异于 $A, B$), 设 $f(C) = C'$. 则点

$$P_{AB} = AB' \times A'B$$

与点

$$P_{AC} = AC' \times A'C$$

互异. 令 $p_0 = P_{AB}P_{AC}$. 考察 $\Gamma$ 的内接六点形 $AB'CA'BC'$, 由 Pascal 定理立刻可得 $P_{BC}$ 在直线 $p_0$ 上，而且 $p_0$ 惟一存在.

**定义 4.16**　定理 4.18 中的直线 $p_0$ 称为二次点列 $\Gamma$ 上射影变换 $f$ 的 **射影轴** 或迳称 **轴**.

**推论 4.11**　二次点列 $\Gamma$ 上非恒同的射影变换 $f$ 的轴 $p_0$ 可以由已知 $f$ 相异的三对对应点惟一确定.

由定理 4.18 容易看出，若已知二次点列 $\Gamma$ 上非恒同的射影变换 $f$ 的轴 $p_0$ 及

任一对相异的对应点，则可以用作图的方法作出 $\Gamma$ 上任一点在 $f$ 下的像．这一作图方法称为 Steiner 作图法．换句话说，即有下述推论．

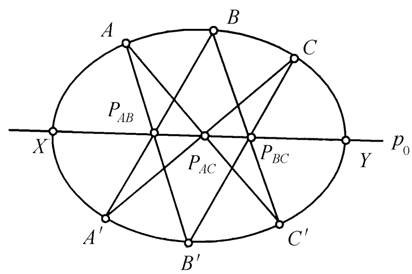



图 4.27

**推论 4.12** 二次点列 $\Gamma$ 上的任一个非恒同的射影变换 $f$ 可由其轴和一对相异的对应点惟一确定.

由定理 4.18, 若 $\Gamma$ 上非恒同的射影变换 $f$ 的轴 $p_0$ 与 $\Gamma$ 交于点 $X$, 则 $X$ 必为 $f$ 的不变点．一般地，直线 $p_0$ 与 $\Gamma$ 的相交情况为：交于两个相异的实点；交于两个重合的实点 (相切); 交于一对共轭虚点．于是类似于一维基本形可以给出下面的定义.

**定义 4.17** 二次点列 $\Gamma$ 上的一个非恒同的射影变换 $f$ 称为是 **双曲型** 的或 **抛物型** 的或 **椭圆型** 的，如果 $f$ 有两个相异的实不变点或惟一实不变点或一对共轭的虚不变点.

二次点列上的双曲型, 抛物型, 椭圆型射影变换的示意图各见图 4.27 和图 4.28.

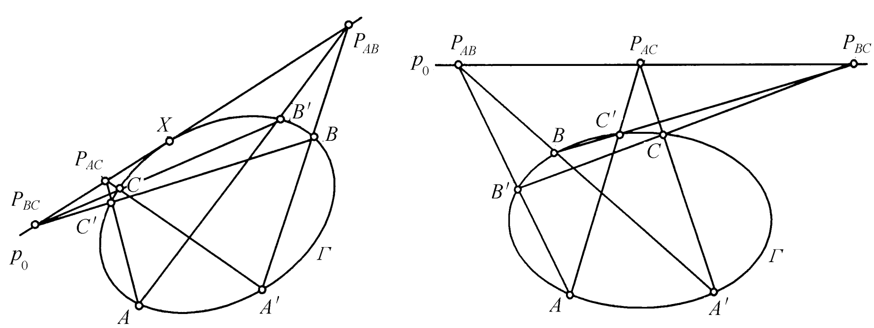



图 4.28

由定义 4.14, 显然有下述定理.

**定理 4.19** 设 $f: \Gamma(P) \barwedge \Gamma(P')$ 为二次点列 $\Gamma$ 上的一个射影变换，又线束

$S(P)\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(P)$, $S(P')\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(P')$, 点列 $x(P_1)\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(P)$, $x(P_1')\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(P')$. 则由 $f$ 分别决定了线束 $S$ 和点列 $x$ 上的射影变换 $f_S$： $S(P)\overline{\wedge}S(P')$, $f_x$： $x(P_1)\overline{\wedge}x(P_1')$. 而且 $f$ 为双曲型的或抛物型的或椭圆型的 $\Longleftrightarrow f_S$, $f_x$ 皆为双曲型的或抛物型的或椭圆型的.

作为上述定理的直接推论，我们有下面的定理.

**定理 4.20**　设 $X, Y$ 是二次点列 $\Gamma$ 上非恒同的射影变换 $f$ 的两个相异的不变点， $P, P'$ 为 $f$ 的任一对对应点 $(P \neq P')$, 则

$$(PP', XY) = k(\text{常数}),$$

其中常数 $k$ 称为射影变换 $f$ 的 **特征不变量**.

**例 4.16**　已知点列 $x$ 上射影变换的相异的三对对应元素和一条非退化二阶曲线 $\Gamma$. 求作 $x$ 上射影变换的不变元素.

**解**　如图 4.29, 已知以直线 $x$ 为底的点列上射影变换的三对相异的对应点 $A_1, A_1'$; $B_1, B_1'$; $C_1, C_1'$ 以及非退化二阶曲线 $\Gamma$. 求作 $x$ 上射影变换的不变点.

作法：(1)　在 $\Gamma$ 上任取一点 $S$, 使 $S \notin x$. 以 $S$ 为投射中心，将 $x$ 上的点 $A_1, A_1'$; $B_1, B_1'$; $C_1, C_1'$ 分别投射到 $\Gamma$ 上，设其像依次为 $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$.

(2)　连结 $AB', A'B$, 设其交点为 $P_{AB}$; 连结 $BC', B'C$, 设其交点为 $P_{BC}$.

(3)　连结 $P_{AB}, P_{BC} = p_0$, 设 $p_0$ 交 $\Gamma$ 于点 $X, Y$.

(4)　以 $S$ 为投射中心，将 $X, Y$ 投射到 $x$ 上，设其像为 $X_1, Y_1$. 则 $X_1, Y_1$ 为所求不变点.

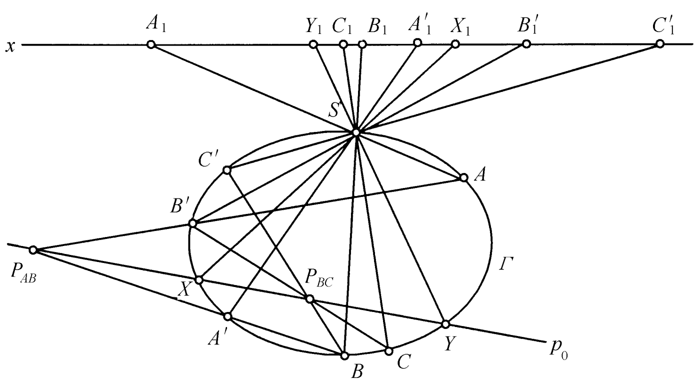



图 4.29

证明：据作法有

$$x(A_1, B_1, C_1, X_1, Y_1, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(A, B, C, X, Y, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(A, B, C, X, Y, \cdots),$$

$$x(A_1', B_1', C_1', X_1, Y_1, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(A', B', C', X, Y, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}\Gamma(A', B', C', X', Y', \cdots),$$

所以

$$\Gamma(A,B,C,X,Y,\cdots)\barwedge\Gamma(A',B',C',X,Y,\cdots),$$

所以 $X_1,Y_1$ 为点列 $x$ 上射影变换的不变点.

讨论：若上述直线 $p_0$ 与 $\Gamma$ 不相交 (交于虚点), 则 $x$ 上的射影变换为椭圆型的. 若 $p_0$ 与 $\Gamma$ 相交，则交点经 $S$ 投射回 $x$ 上即为实的不变点， $p_0$ 与 $\Gamma$ 有两个相异交点则为双曲型， $p_0$ 与 $\Gamma$ 相切则为抛物型的. 这样的分析看上去是十分完美的，但是仔细思考一下，我们将会对此作图法的可靠性产生怀疑. 首先是我们无法可靠区分出双曲型和抛物型，哪怕看上去 $p_0$ 是与 $\Gamma$ 相切，但如何断定是相切呢？再者，如果画图时稍有误差，如何能肯定 $p_0$ 与 $\Gamma$ 确实是相交或是不相交呢？所以这种作图方法也许只能用在比较粗略的场合，尽管理论上是正确的.

### 三、二次点列上的对合

**定义 4.18** 二次点列 $\Gamma$ 上的一个非恒同的射影变换 $f$ 称为 **对合**, 如果任取 $\Gamma$ 上一点 $S$ 与 $f$ 的对应点连线而得线束 $S$ 中的射影变换 $f_0$ 为对合.

显然，上述定义中 $f$ 为对合与点 $S$ 在 $\Gamma$ 上的选取无关. 从而我们可以说，二次点列的对合由一个与之透视的线束中的对合所诱导. 有关线束中对合的一般性质都可以移植到二次点列上来. 特别地，我们有下列定理.

**定理 4.21** 对于二次点列 $\Gamma$, 下列结论成立.

(1) $\Gamma$ 上的对合可由其相异的两对对应点惟一确定.

(2) $\Gamma$ 上的一个非恒同的射影变换 $f$ 为对合 $\Longleftrightarrow$ $f$ 有一对对应点相互对应.

(3) $\Gamma$ 上三对对应点 $P_1,P_1';P_2,P_2';P_3,P_3'$ 属于同一个对合 $\Longleftrightarrow$

$$(P_1P_1',P_2P_3)=(P_1'P_1,P_2'P_3').$$

**定义 4.19** 二次点列 $\Gamma$ 上对合 $f$ 的射影轴 $p_0$ 称为对合 $f$ 的 **对合轴**.

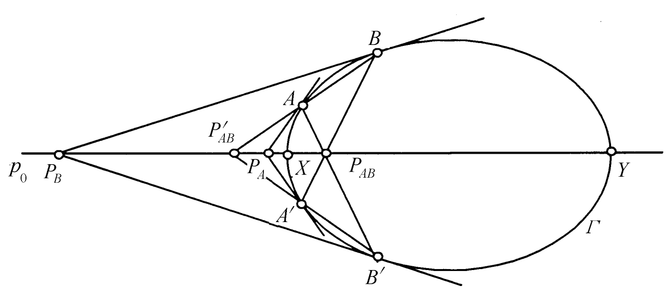



图 4.30

由射影轴及对合的定义，立刻可得下述结论.

**定理 4.22** 对于二次点列 $\Gamma$ 上的对合 $f$,

(1) $f$ 的对合轴可由其相异的两对对应点惟一确定.

(2) 对合 $f$ 可由其对合轴惟一确定.

(3) 在 $f$ 的任一对相异的对应点处 $\Gamma$ 的切线交于对合轴.

由定义 4.18, 二次点列上不存在抛物型对合，二次点列上的对合或者是双曲型或者是椭圆型的．显然，对合轴与 $\Gamma$ 的交点 (两个相异实点或一对共轭虚点) 就是对合不变点，而且有下列结论.

**定理 4.23** 二次点列 $\Gamma$ 上对合 $f$ 的任一对相异的对应点被其两个不变点调和分离，即对合的特征不变量为 $-1$.

此外，由定理 4.22(3), 根据配极原则可知， $\Gamma$ 上的对合 $f$ 的任一对对应点的连线必过定点，此点作为对合轴 $p_0$ 的极点而惟一存在．进而有下面的定理.

**定理 4.24** 二次点列 $\Gamma$ 上的对合 $f$ 的任一对对应点的连线必过定点；反之，以不在 $\Gamma$ 上的任一点为束心的线束中每一直线与 $\Gamma$ 的交点为 $\Gamma$ 上同一对合的对应点.

**证明** 只要证后一结论．如图 4.31, 设 $P_0$ 为不在 $\Gamma$ 上的任一定点，过 $P_0$ 的直线与 $\Gamma$ 分别交于 $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$; $\cdots$. 由配极原则，这些点偶处的切线交点共线为点 $P_0$ 的极线，记作 $p_0$.

首先，易见下列的点 $P_{AB} = AB' \times A'B$, $P_{AC} = AC' \times A'C$, $P_{BC} = BC' \times B'C$ 均在 $P_0$ 的极线 $p_0$ 上，所以，在 $\Gamma$ 上有

$$\Gamma(A, B, C, \cdots) \barwedge \Gamma(A', B', C', \cdots).$$

然后，由于点 $P'_{AB} = AB \times A'B'$ 也在 $p_0$ 上，从而上述射影变换使得一对对应点 $B, B'$ 相互对应，故为对合．证毕.

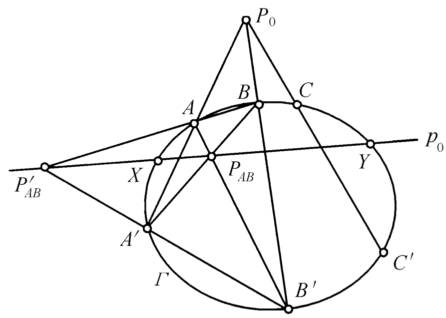



图 4.31

**定义 4.20** 二次点列 $\Gamma$ 上的对合 $f$ 的对合轴 $p_0$ 关于 $\Gamma$ 的极点 $P_0$ 称为对合 $f$ 的 **对合中心**.

**推论 4.13** 二次点列 $\Gamma$ 上的对合 $f$ 可由其对合中心惟一确定.

## 习 题 4.5

1. 从一点 $T$ 作二阶曲线 $\Gamma$ 的两切线 $TX, TY$, $X, Y$ 为切点，再过 $T$ 作 $\Gamma$ 的割线 $TAB$ 交 $\Gamma$ 于 $A, B$. 求证： $(AB, XY) = -1$.

2. 在上题中, 设 $R$ 为 $\Gamma$ 上任一点， $RX, RY$ 分别交 $AB$ 于 $P, Q$. 求证： $(PQ, AB) = -1$.

3. 设 $A, B, C, D$ 为二阶曲线 $\Gamma$ 上四点，且 $(AB, CD) = -1$. 求证：直线 $AB$ 与 $CD$ 为关于 $\Gamma$ 的共轭直线.

4. 设 $A, A'; B, B'$ 为二次点列 $\Gamma$ 上对合的两对对应点， $X, Y$ 是其两个不变点. 求证： $A, B$; $A', B'$; $X, Y$ 是 $\Gamma$ 上另一个对合的三对对应点.

5. 如图 4.32, 设 $A$ 是两条二阶曲线 $\Gamma$ 与 $\Gamma'$ 的一个交点， $PQ$ 为 $\Gamma$ 的弦通过不在 $\Gamma$ 上一个定点 $P_0$, $AP, AQ$ 分别交 $\Gamma'$ 于点 $P', Q'$. 求证：直线 $P'Q'$ 通过一个定点.

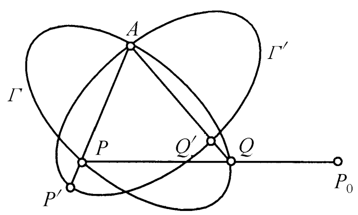



图 4.32

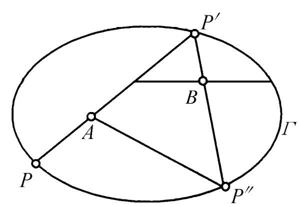



图 4.33

6. 已知点列 $x(P_1)$ 上对合 $f$ 的两对相异的对应点以及一条非退化二阶曲线 $\Gamma$. 求作 $f$ 的不变点.

7. 如图 4.33, 设 $A, B$ 为不在二阶曲线 $\Gamma$ 上的两个定点， $PP', P'P''$ 为分别通过 $A, B$ 的 $\Gamma$ 的两条动弦. 求证： $\Gamma(P)$ 与 $\Gamma(P')$; $\Gamma(P')$ 与 $\Gamma(P'')$ 都是 $\Gamma$ 上的对合点列. 问 $\Gamma(P)$ 与 $\Gamma(P'')$ 是否一定成为对合点列？

8. 设 $PP'$ 为二阶曲线 $\Gamma$ 的过定点 (不在 $\Gamma$ 上) 的动弦，又 $A, B$ 为 $\Gamma$ 上的两个定点，且 $Q = AP \times BP'$, $R = BP \times AP'$. 求证： $Q, R$ 在另一条二阶曲线上.

## §4.6 二次曲线的仿射理论

本节在射影仿射平面上讨论二次曲线的仿射性质. 从而可以与解析几何中的二次曲线理论建立紧密联系. 由第三章，无穷远直线是仿射不变的，因此，二次曲线的仿射理论与无穷远直线有着必然的联系. 而且，在指定 $x_3 = 0$ 为无穷远直线的前提下，选取射影坐标系时，直线 $x_3 = 0(l_\infty)$ 将总是作为坐标三点形的一边，我们将射影仿射平面上的这样的齐次射影坐标系称为 **齐次仿射坐标系**.

### 一、二阶曲线与无穷远直线的关系

**定义 4.21** 设 $\Gamma$ 为平面上的任意一条二阶曲线. 则 $\Gamma$ 与无穷远直线 $l_\infty$ 必定相交，或者交于两个相异实点，或者交于两个重合实点 (相切), 或者交于两个共轭虚点. 对应于上述三种情况，我们分别称 $\Gamma$ 为 **双曲型** 的，或 **抛物型** 的，或 **椭圆型** 的曲线. 如果 $\Gamma$ 是非退化的，则分别称为 **双曲线**, **抛物线** 或 **椭圆**.

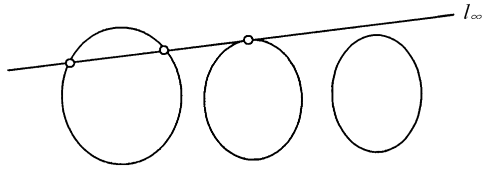



图 4.34

从代数角度，也不难看出在仿射平面上，二阶曲线被划分为双曲型，抛物型和椭圆型三个等价类. 设给定二阶曲线

$$\Gamma: \quad S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{4.1}$$

其中 $x_i$ 表示点的齐次仿射坐标. 联立

$$\begin{cases} S = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

即为 $\Gamma$ 与 $l_\infty$ 的交点. 显然，交点的前两个坐标分量由下式决定.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{4.31}$$

从而，对于 $x_1/x_2$, 上式有两个相异实根，或两个相同实根或两个共轭虚根 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \Gamma\text{为} \begin{cases} \text{双曲型} \\ \text{抛物型曲线} \\ \text{椭圆型} \end{cases}$$

由上述讨论，我们有下列定理.

**定理 4.25** 对于二阶曲线 $\Gamma: S = 0$, $A_{33}$ 的符号为仿射不变性.

在本节以下的讨论中, 总假设所论二阶曲线 $\Gamma$ 的方程为 (4.1), 且为非退化的.

## 二、二阶曲线的中心

**定义 4.22** 无穷远直线关于二阶曲线 $\Gamma$ 的极点称为 $\Gamma$ 的 **中心**.

**定理 4.26** 双曲线和椭圆各有一个中心为有穷远点，抛物线的中心为无穷远点.

**证明** 设 $\Gamma$ 的中心为 $C(c_1, c_2, c_3)$. 则 $C$ 为 $l_\infty : x_3 = 0$ 的极点. 于是有中心方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho \neq 0, \tag{4.32}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = 0, \end{cases} \tag{4.33}$$

也就是

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right|_C = 0, \\ \left.\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right|_C = 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

解之，得 $c_1 : c_2 : c_3 = A_{31} : A_{32} : A_{33}$. 故中心坐标为

$$\text{双曲线与椭圆：}\quad (A_{31}, A_{32}, A_{33}), \qquad \text{抛物线：}\quad (A_{31}, A_{32}, 0). \tag{4.35}$$

对于抛物线，由于已知其中心为无穷远点，所以 $c_3 = 0$, 于是只要求解

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 = 0, \end{cases}$$

即可求得中心坐标为 $(a_{12}, -a_{11}, 0)$ 或 $(a_{22}, -a_{12}, 0)$.

由定义 4.22 结合交比的性质可以看出，通常点 $C$ 为二阶曲线 $\Gamma$ 的中心的充要条件是 $C$ 为 $\Gamma$ 的对称中心，这正好与解析几何的定义一致. 当我们去掉无穷远直线后，抛物线的中心消失，所以我们称双曲线和椭圆为**有心二阶曲线**, 而称抛物线为 **无心二阶曲线**. 显然，判别二阶曲线为无心的还是有心的依据是 $A_{33}$ 是否为零.

## 三、直径与共轭直径

**定义 4.23** 无穷远点关于二阶曲线 $\Gamma$ 的有穷远极线称为 $\Gamma$ 的 **直径**. 二阶曲线 $\Gamma$ 的一条直径上的无穷远点的极线称为该直径的 **共轭直径**. $\Gamma$ 的两条相互共轭的直径所在方向称为 $\Gamma$ 的一对 **共轭方向**.

由定义 4.23 立即可得下列结论.

**定理 4.27** 有心二阶曲线的任一直径平分与其共轭方向平行的一组弦，并且平行于其共轭直径与 $\Gamma$ 交点处的切线；抛物线的直径相互平行，而且任一直径平分一组与该直径和 $\Gamma$ 的有穷远交点处切线平行的弦.

由定理 4.27 及抛物线的中心坐标，可以直接写出抛物线的直径方程

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+bx_3=0,\text{或 } a_{12}x_1+a_{22}x_2+bx_3=0 \quad (b\text{ 为常数}). \tag{4.36}$$

以下我们专门讨论有心二阶曲线的直径与共轭直径. 对于给定有心二阶曲线 $\Gamma$ 和两个无穷远点 $(1,0,0),(0,1,0)$, 可以求得其所对应的直径 (极线) 方程为

$$\begin{aligned} l_1:&\quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ l_2:&\quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\end{aligned} \qquad \text{即} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x_1}=0,\\ \frac{\partial S}{\partial x_2}=0.\end{aligned}$$

因而， $\Gamma$ 的任一直径 $l$ 的方程可表为

$$l:\quad \frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0, \qquad k\in\overline{R}. \tag{4.37}$$

上式中的 $k$ 实际上是 $l$ 的共轭直径的斜率，因为由上式不难看出， $l$ 为点 $(1,k,0)$ 的极线.

现在讨论两直径共轭的条件. 设方程为 (4.37) 的直径 $l$ 的共轭直径为 $l'$, 则 $l'$ 为 $l$ 上的无穷远点 $(a_{12}+ka_{22},-(a_{11}+ka_{12}),0)$ 的极线, 从而可以写出 $l'$ 的方程为

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}(a_{12}+ka_{22})-\frac{\partial S}{\partial x_2}(a_{11}+ka_{12})=0, \quad \text{即} \quad \frac{\partial S}{\partial x_1}+k'\frac{\partial S}{\partial x_2}=0. \tag{4.38}$$

于是有

$$k'=-\frac{a_{11}+ka_{12}}{a_{12}+ka_{22}}. \tag{4.39}$$

即

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0, \qquad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=A_{33}\neq 0. \tag{4.40}$$

(4.40) 式即为两直径 $l,l'$ 共轭的充要条件，这表明，在以有心二阶曲线的中心为束心的线束中，直径与共轭直径的对应为一个对合对应.

**例 4.17** 已知二阶曲线 $\Gamma: x^2-y^2+3x+y-2=0$ ，求其一条直径使得被它平分的弦平行于直线 $l:2x+y=0$.

**解** 设所求直径方程为

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\lambda\frac{\partial S}{\partial y}=0,$$

即 $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\lambda\left(-y+\dfrac{1}{2}\right)=0$ 根据 $\lambda$ 的几何意义可知被此直径所平分的弦的斜率为 $-2$. 从而 $\lambda=-2$. 故易求出所求直径方程为

$$2x+4y+1=0.$$

**例 4.18** 如图 4.35， $T$ 是有心二阶曲线 $\Gamma$ 的弦 $QQ'$ 的极点， $O$ 是中心，$OT$ 交 $QQ'$ 于 $V$，交 $\Gamma$ 于 $U,U'$.

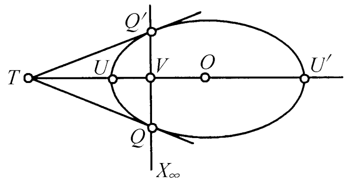



图 4.35

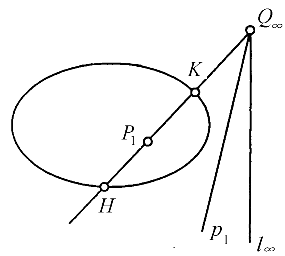



图 4.36

求证： (1) $QV=VQ'$; (2) $OU^2=OV\cdot OT$.

**证明** (1) 令 $QQ'$ 上的无穷远点为 $X_\infty$. 因为 $O$ 是中心，即 $O$ 为 $l_\infty$ 的极点，又 $T$ 的极线 $QQ'$ 过 $X_\infty$，由配极原则知， $X_\infty$ 的极线过 $T$. 而 $X_\infty$ 的极线是直径，必过中心 $O$，所以 $X_\infty$ 的极线为 $OT$. 由极线的定义有

$$(QQ',VX_\infty)=-1,$$

所以 $V$ 为 $QQ'$ 的中点，即 $VQ'=QV$.

(2) 因为 $T$ 的极线是 $QQ'$，所以 $(UU',TV)=-1$. 展开此式并利用 $O$ 为 $UU'$ 的中点及有向线段加法，整理可得

$$OU^2=OV\cdot OT.$$

**例 4.19** 求证：二阶曲线的以 $P_1$ 为中点的弦 $HK$ 平行于 $P_1$ 的极线 (如图 4.36). 又如果 $P_1(y_1,y_2,y_3)$，求 $HK$ 的方程.

**证明**： (1) 设 $HK$ 交 $l_\infty$ 于 $Q_\infty$，则

$$(HK,P_1Q_\infty)=-1.$$

故 $P_1,Q_\infty$ 为关于二阶曲线 $\Gamma$ 的一对共轭点. 所以 $Q_\infty$ 在 $P_1$ 的极线上. 即 $HK$ 与 $P_1$ 的极线交于 $Q_\infty$，所以 $HK$ 平行于 $P_1$ 的极线.

(2) 若 $P_1(y_1,y_2,y_3)$ ，则 $P_1$ 关于 $\varGamma$ 的极线方程为 $S_y=0$. 又 $l_\infty$ 的方程为 $x_3=0$ ，故 $HK$ 的方程必定形如

$$S_y+\lambda x_3=0,$$

这是以 $Q_\infty$ 为束心的线束方程. 因为 $P_1(y_1,y_2,y_3)$ 在 $HK$ 上, 所以 $S_{yy}+\lambda y_3=0$ ，于是得

$$\lambda=-\frac{S_{yy}}{y_3},$$

从而 $HK$ 的方程为

$$S_y-\frac{S_{yy}}{y_3}x_3=0.$$

### 四、二阶曲线的渐近线

**定义 4.24** 二阶曲线在其上无穷远点处的有穷远切线称为二阶曲线的 **渐近线**. 与渐近线平行的方向称为二阶曲线的 **渐近方向**.

由定义可见, 双曲线有两条实渐近线, 椭圆有两条虚渐近线, 而抛物线没有渐近线. 因此, 本小节只讨论有心二阶曲线.

渐近线是自共轭的直径. 在由直径与共轭直径的对应所确定的二阶曲线的中心为束心的线束的对合下, 渐近线是两条不变直线, 因此, 有心二阶曲线的两条渐近线调和分离任意一对相异的共轭直径.

**例 4.20** 已知有心二阶曲线

$$\varGamma:\quad S\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0.\qquad (a_{ij}=a_{ji}),|a_{ij}|\neq 0,A_{33}\neq 0 \tag{4.41}$$

求 $\varGamma$ 的渐近线方程.

我们介绍三种求渐近线的方法.

**解法一** 利用对合不变元素，写出

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0.$$

令 $k=k'$, 得

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0.$$

这是求直径与共轭直径的对合不变元素的方程,亦即求渐近方向的方程. 若 $A_{33}<0$, 则可求出两个实根 $k_i$, 此时 $\varGamma$ 为双曲线; 若 $A_{33}>0$, 则可求出两个共轭虚根 $k_i$, 此时 $\varGamma$ 为椭圆. 将求出的 $k_i$ 分别代入

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0,$$

即可求出两条渐近线的方程.

此法当 $\dfrac{\partial S}{\partial x_1}=0$ 或 $\dfrac{\partial S}{\partial x_2}=0$ 为渐近线时，容易造成失根错误.

**解法二** 利用中心与渐近方向. 联立

$$\begin{cases} S=0, \\ x_3=0, \end{cases}$$

得

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0.$$

这是两条过原点的直线，其上无穷远点即为 $\Gamma$ 与无穷远直线的交点，因而这两直线平行于渐近方向. 化为非齐次，得

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0.$$

设中心的非齐次坐标为 $(\xi,\eta)$. 则两条渐近线的方程为

$$a_{11}(x-\xi)^2+2a_{12}(x-\xi)(y-\eta)+a_{22}(y-\eta)^2=0.$$

**解法三** 利用切线方程. 因为过 $\Gamma$ 外一点 $P$ 到 $\Gamma$ 的切线方程为 $S_{pp}S=S_p^2$. 若 $P$ 为中心，则 $P(A_{31},A_{32},A_{33})$, 代入即可得两渐近线方程. 我们对这个方法进行简化. 因为

$$S_p=\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3,$$

而 $P$ 为中心，所以有 $\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p=0$, $\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p=0$. 从而

$$S_p=\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3.$$

将 $P$ 的坐标代入，得

$$S_p=(a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33})\cdot x_3=|a_{ij}|x_3.$$

从而又有

$$S_{pp}=|a_{ij}|A_{33},$$

于是，渐近线方程为

$$|a_{ij}|A_{33}S=|a_{ij}|^2x_3^2, \qquad 即 \qquad A_{33}\cdot S=|a_{ij}|\cdot x_3^2.$$

令 $\lambda=-|a_{ij}|/A_{33}$, 渐近线的方程可以写为

$$S+\lambda x_3^2=0. \tag{4.42}$$

**例 4.21** 求双曲线 $x^2+3xy-4y^2+2x-10y=0$ 的渐近线方程.

**解法一** 设所求渐近线的方程为

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\lambda\frac{\partial S}{\partial y}=0, \tag{$*$}$$

则 $\lambda$ 必是下列方程的根

$$1+3\lambda-4\lambda^2=0,$$

解得 $\lambda_1=-\dfrac{1}{4},\lambda_2=1$. 分别代入 $(*)$ 得两渐近线方程为

$$5x+20y+18=0, \qquad 5x-5y-8=0.$$

**解法二** 先求得中心的齐次坐标 $(-14,26,-25)$ ,并改写为非齐次坐标得 $\left(\dfrac{14}{25},-\dfrac{26}{25}\right)$. 则所求渐近线方程为:

$$\left(x-\frac{14}{25}\right)^2+3\left(x-\frac{14}{25}\right)\left(y+\frac{26}{25}\right)-4\left(y+\frac{26}{25}\right)^2=0.$$

**解法三** 由于 (4.42) 表示两条直线方程，因此有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -4 & -5 \\ 1 & -5 & 0+\lambda \end{vmatrix}=0$$

解得 $\lambda=-\dfrac{144}{25}$, 代入 $S+\lambda x_3^2=0$ 并化简，得渐近线方程为

$$25x_1^2+75x_1x_2-100x_2^2+50x_1x_3-250x_2x_3-144x_3^2=0.$$

**例 4.22** 双曲线的任一条切线交两条渐近线于两点. 求证：切点是此二点所连线段的中点.

**证明** 如图 4.37, 设 $M$ 点处的切线交两条渐近线于 $P,Q$, $C$ 是双曲线的中心. 设 $PQ\times l_\infty=N_\infty$, 连结 $CM,CN_\infty$, 设 $CM\times l_\infty=M_\infty$. 因为 $C$ 的极线为 $l_\infty$, $M$ 的极线为 $PQ$, 从而 $CM$ 的极点为 $l_\infty\times PQ=N_\infty$. 同理， $CN_\infty$ 的极点为 $M_\infty$. 于是， $CM,CN_\infty$ 为一对共轭直径，从此得

$$C(PQ,MN_\infty)=(PQ,MN_\infty)=-1,$$

故 $M$ 为 $PQ$ 的中点.

**例 4.23** 求证：双曲线上任一点处的切线与两渐近线所围成的三角形的面积为常量.

**证明** 如图 4.38, 设双曲线的两条切线依次交两渐近线于 $A,B$ 和 $A',B'$. 于是, 两切线与两渐近线构成双曲线的一个外切四线形, 据定理 4.10 的对偶命题 (外切于非退化二次曲线的简单四线形的两双对顶的连线及两双对边上切点的连线必四线共点) 可知, $AB',A'B,l_\infty$ 共点. 即 $AB'//A'B$. 从而三角形 $A'B'A$ 与 $AB'B$ 等积, 于是, 三角形 $ABC$ 与 $A'B'C$ 等积.

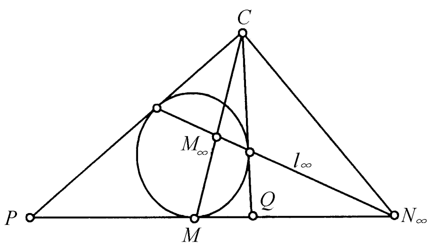



图 4.37

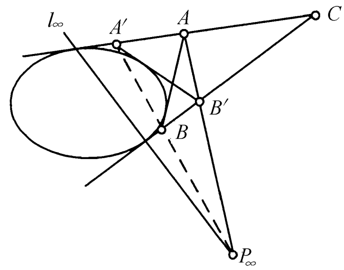



图 4.38

## 习 题 4.6

1. 试说明下列二阶曲线是何种类型的曲线, 并求出各曲线的中心坐标.

(1) $2x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6x_1x_3-5x_2x_3+x_3^2=0$;

(2) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+x_2x_3-x_3^2=0$.

2. 求二阶曲线 $\varGamma: x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2=0$ 的过点 $A(1,1,1)$ 的直径及其共轭直径.

3. 给定二阶曲线 $\varGamma: x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+10x_1x_3+4x_2x_3=0$.

(1) 证明 $\varGamma$ 是双曲线;

(2) 求中心坐标;

(3) 求斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直径及其共轭直径;

(4) 求渐近线方程.

4. 求下列双曲线的渐近线方程.

(1) $x^2+2xy-3y^2+2x-4y=0$;

(2) $xy+y^2-x-3y-2=0$;

(3) $xy-a^2=0$.

5. 求二阶曲线 $\varGamma_1: x^2+xy+y^2=1$ 与 $\varGamma_2: 3x^2-xy+2y^2=1$ 的公共共轭直径.

6. 求证: 椭圆的两平行切线的切点连线是一条直径.

7. 求证: 过不在渐近线上的一定点所作二阶曲线诸弦中点的轨迹构成另一条二阶曲线.

8. 如图 4.39, 自无穷远点 $P_\infty,Q_\infty$ 引椭圆的切线, 构成一个外切四边形 $ABCD$. 求证: 这个外切四边形的对角线 $AC$ 与 $BD$ 的交点 $O$ 是椭圆的中心.

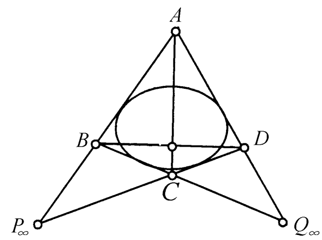



图 4.39

9. 求证：任一直线交双曲线与两渐近线成相等的线段 (参见图 4.40).

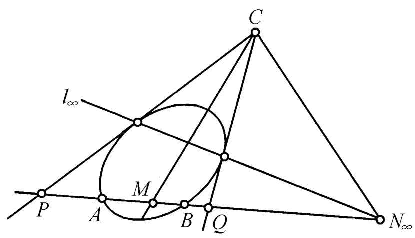



图 4.40

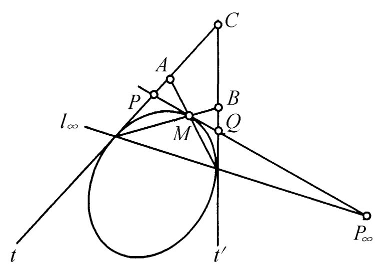



图 4.41

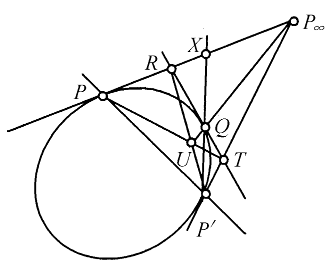



图 4.42

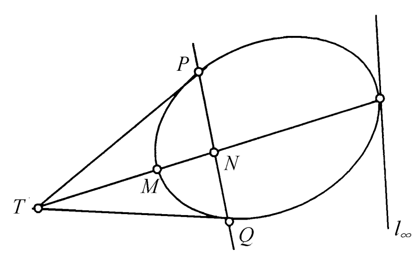



图 4.43

10. 从双曲线上任一点作平行于两渐近线的直线. 求证：这两直线与渐近线所成平行四边形的面积为定值 (参见图 4.41).

11. 如图 4.42, 设 $PP'$ 是有心二阶曲线的直径. 任何点 $Q$ 处的切线与 $P$ 处的切线交于 $R$, $P'Q \times PR = X$. 求证： $PR = RX$.

12. 如图 4.43, 设 $T$ 为抛物线的弦 $PQ$ 的极点，过 $T$ 的直径交弦 $PQ$ 于 $N$. 证明：线段 $TN$ 被抛物线平分.

## §4.7 二次曲线的仿射分类

本节讨论二次曲线的仿射分类, 即在仿射变换下, 将二次曲线划分为等价类, 并对每一个等价类给出其仿射标准方程. 由于仿射变换的特征是保持无穷远直线 $x_3=0$ 不变, 因此, 在选取新的坐标三点形时, 总是以 $x_3=0$ 作为一边, 即新坐标三点形的顶点 $A_1', A_2'$ 总是取在无穷远直线上.

设在仿射坐标系下给定二阶曲线

$$\Gamma:\ S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{4.1}$$

我们来讨论其仿射分类, 并对每一个类导出其仿射标准方程.

### 一、非退化二阶曲线的仿射分类

此时, $|a_{ij}|\neq 0$, 秩 $(a_{ij})=3$, 依据 $A_{33}$ 是否为零, 又分为下列两种情况.

1. $A_{33}\neq 0$. $\Gamma$ 为有心二阶曲线即椭圆或双曲线, 与无穷远直线不相切. 可选取中心为新坐标系的 $A_3'$, 任取一对相异的共轭直径, 将其与 $l_\infty$ 的交点取作 $A_1', A_2'$. 则新的坐标三点形是 $\Gamma$ 的一个自极三点形. 适当选取单位点, 仿照 §4.5, 可将 $\Gamma$ 的方程化为

$$\pm x_1''^2 \pm x_2''^2 \pm x_3''^2 = 0. \tag{4.25}$$

由于其中 $x_1, x_2$ 地位平等, 而 $x_3$ 的地位特殊, 故 (4.25) 共可分为三个仿射等价类 (为方便计, 我们略去流动坐标的上标 “ $'$ ” 和 “ $''$ ” 等).

$$A_{33}>0 \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 & \text{实椭圆} \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 & \text{虚椭圆} \end{cases} \tag{4.41}$$

$$A_{33}<0 \qquad x_1^2-x_2^2-x_3^2=0 \qquad \text{双曲线} \tag{4.42}$$

2. $A_{33}=0$. $\Gamma$ 为无心二阶曲线即抛物线, 不存在以 $l_\infty$ 为一边的自极三点形. 取中心 (无穷远切点) 为 $A_1'$, 取一直径与 $\Gamma$ 的有穷远交点为 $A_3'$, 取 $A_3'$ 处的切线与 $l_\infty$ 的交点为 $A_2'$, 适当选取单位点构成新的仿射坐标系. 设在此坐标系下, $\Gamma$ 的方程化为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}'x_i'x_j' = 0. \tag{4.43}$$

因为 $A_2'(0,1,0)$ 的极线为 $a_{21}'x_1'+a_{22}'x_2'+a_{23}'x_3'=0$, 此式应与 $x_2'=0$ 表示同一直线, 所以在 (4.43) 中必有 $a_{21}'=a_{23}'=0$, 而 $a_{22}'\neq 0$. 同理可得 $a_{11}'=a_{12}'=0$,

$a'_{13} \neq 0$; $a'_{32} = a'_{33} = 0$, $a'_{31} \neq 0$. 从而 (4.43) 即为

$$a'_{22}x'^2_2 + 2a'_{13}x'_1x'_3 = 0. \tag{4.44}$$

再作一次仅改变单位点的仿射坐标变换

$$\begin{cases} \rho x'_1 = \dfrac{a'_{22}}{a'_{13}}x''_1, \\ \rho x'_2 = x''_2, \\ \rho x'_3 = x''_3, \end{cases}$$

得到 (我们同样略去流动坐标的上标“ $'$ ”和“ $''$ ”等)

$$x_2^2 + 2x_1x_3 = 0. \tag{4.45}$$

这就是抛物线的仿射标准方程，请读者将此与习题 4.5 第 2 题的结论相对照.

综上，非退化二阶曲线共分为四个仿射等价类.

## 二、退化二阶曲线的仿射分类

此时， $|a_{ij}| = 0$, $1 \leq$ 秩$(a_{ij}) \leq 2$.

1. 秩 $(a_{ij}) = 2$. $\varGamma$ 退化且具有惟一奇异点.

(1) 奇异点为有穷远点. 在无穷远直线上取 $A'_1, A'_2$, 然后仿照 §4.5, 可将 $\varGamma$ 的方程化为

$$\pm x''^2_1 \pm x''^2_2 = 0. \tag{4.46}$$

注意到 $x''_1, x''_2$ 的地位平等， (4.46) 即 (略去“ $''$ ”)

$$\begin{aligned} &x_1^2 - x_2^2 = 0, &&\text{两条相交实直线;} \\ &x_1^2 + x_2^2 = 0, &&\text{两条共轭虚直线.} \end{aligned} \tag{4.47}$$

(2) 奇异点为无穷远点，且无穷远直线上没有曲线的其他点. 取奇异点为 $A'_2$, 另在无穷远直线上取 $A'_1$, 仿照 §4.5, 可将 $\varGamma$ 的方程化为 (略去“ $''$ ”)

$$\begin{aligned} &x_1^2 - x_3^2 = 0, &&\text{一对平行实直线;} \\ &x_1^2 + x_3^2 = 0, &&\text{一对平行虚直线.} \end{aligned} \tag{4.48}$$

(3) 奇异点为无穷远点，且无穷远直线上还有曲线的其他点. 此时无穷远直线必整个属于 $\varGamma$. 仍取奇异点为 $A'_2$, 再于曲线上取一无穷远点为 $A'_1$, 取曲线上一

个有穷远点为 $A_3'$, 适当选取单位点建立新的仿射坐标系，在此坐标系下二阶曲线的方程必定化为

$$x_1'x_3' = 0, \qquad \text{一条通常直线和一条无穷远直线.} \tag{4.49}$$

2. 秩 $(a_{ij}) = 1$. 由 §4.5 讨论，此时 $\varGamma$ 退化为两条重合直线，且这直线由奇异点构成.

(1) 奇异点所在直线为有穷远直线，以此直线为 $x_1' = 0$, $\varGamma$ 的方程可化为

$$x_1'^2 = 0, \qquad \text{一对重合的通常直线.} \tag{4.50}$$

(2) 奇异点所在直线为无穷远直线，则以此直线为 $x_3' = 0$, $\varGamma$ 的方程可化为

$$x_3'^2 = 0, \qquad \text{一对重合的无穷远直线.} \tag{4.51}$$

综上，退化二阶曲线共分为七个仿射等价类.

**例 4.24** 求仿射坐标变换，化下述二阶曲线 $\varGamma$ 的方程为仿射标准方程.

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 9x_3^2 = 0.$$

**解** 第一步. 因为

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

所以， $\varGamma$ 为非退化的二阶曲线. 又

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

故 $\varGamma$ 为一个椭圆.

第二步. 选取新的坐标系.

求出 $A_{31} = 5, A_{32} = -2$ ，得中心坐标为 $(5, -2, 1)$. 取中心 $R(5, -2, 1)$ 为新坐标三点形的顶点 $A_3'$. 在 $l_\infty$ 上取不在 $\varGamma$ 上的一点 $P(1, 0, 0)$ 为 $A_1'$.

求出 $P$ 的极线与 $l_\infty$ 的交点 $Q(1, -1, 0)$ 作为 $A_2'$. 则 $A_1'A_2'A_3'$ 必为 $\varGamma$ 的一个自极三点形，以它作为新的仿射坐标三点形，并取 $D(7, -3, 1)$ 作为新的单位点 $E'$.

第三步. 作仿射坐标变换并化简方程.

由新坐标三点形及其单位点的选取，据 (1.10) 式，我们可以直接写出仿射坐标变换的逆式

$$\rho\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

将 $(*)$ 代入原方程，展开化简得新方程为

$$x_1'^2+x_2'^2-4x_3'^2=0.$$

再作一次仅改变单位点的仿射坐标变换

$$\mu\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix},$$

可得 $\varGamma$ 的仿射标准方程为

$$x_1''^2+x_2''^2-x_3''^2=0.$$

这是一个实椭圆.

## 习 题 4.7

1. 求仿射坐标变换，将下列各二阶曲线的方程化为仿射标准方程.

(1) $x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+10x_1x_3+4x_2x_3=0$;

(2) $x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2=0$;

(3) $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+4x_1x_3+2x_2x_3-48x_3^2=0$;

(4) $2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+2x_1x_3+5x_2x_3-8x_3^2=0$;

(5) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2=0$.

2. 求证：在仿射坐标系下，

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+2(px+qy+r)=0 \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ p & q \end{vmatrix}\neq 0\right)$$

表示一条抛物线. 试说明 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 与 $px+qy+r=0$ 的几何意义.

# 第五章　几何学寻踪

几何学伴随着人类文明而产生，对人类文明进步作出了不可磨灭的贡献．同时，它也从人类文明的发展进程中吸取营养，不断地发展进步．几何学的发展史与人类文明史密不可分，其绚丽的画卷在人类历史长河中无处不见．我们无法用简短的文字反映几何学的灿烂历史，只能展示浩瀚几何之海中几块美丽的贝壳，但愿能够引起广大读者科海寻贝的兴趣.

## §5.1　Euclid 几何学

几何学这个词，来源于希腊文 geometrein, 其本来的文字涵义是土地测量．中文将“几何”一词用于几何学是徐光启、 Matteo Ricci(利玛窦， 1552～1610) 翻译 Euclid(欧几里得) 的《原本》开始的.

远古时代，几何学甚至于数学都几乎没有作为学科而存在．通过生产实际，人们从一、二到许多，逐渐地认识数，认识一些图形，这些杂乱的知识基本上来自于实践或实验，应简单交易、土地面积计算、在陶瓷等器皿上绘制简单几何图案等实际需要的刺激而发展．经过实践总结出来的一些计算法则和公式也往往未必准确或正确，总体上还算过得去，满足于大概差不多．比如以圆的周长平方的十二分之一即相当于 3 作为圆周率，我国古代以直径为边的正方形面积的九分之八作为圆的面积，相当于取 3.16 作为圆周率．但是一些比较正规形状的面积、体积计算，也有正确的．值得一提的是我国的勾股定理 (西方叫 Pythagoras 定理), 和割补法等．在这一时期，尼罗河下游三角洲的古埃及，美索不达米亚平原上的古巴比伦，印度河与恒河沿岸的印度，黄河流域的中国这四大文明古国，都在生产实践中积累了大量而不成体系的数学知识.

数学史上的一颗灿烂明珠是古希腊文明时期，这一时期数学、特别是几何学发达到了惊人的程度，将数学由实用推向了理论，创建了数学史上的一大丰功伟绩．古希腊文明大致分布于现在的地中海周围，这个时期大致时间为公元前 6 世纪到公元 641 年．古希腊文明时期的数学先后相继地在地中海沿岸的几个地方发展起来，每个地方都由一群学者在一两个伟大的学者领导下开展活动，形成了一些著名的学派，这些学派对于 Euclid 几何学的形成有着重大的影响.

公元前 640 年到公元前 546 年左右， Thales 在 Ionia 的 Miletus 创立了 Ionia 学派，他利用相似三角形原理由金字塔的影子长度算出金字塔的高度，他发现了一些有关三角形的重要定理，提出了数学命题的演绎证明思想.

Pythagoras 曾就学于 Thales, 之后到处游历，以他为代表，公元前 585 年左右

至公元前 400 年左右在现今土耳其西岸小岛 Samos 形成了 Pythagoras 学派，他们以“万物皆为数”为最高信条，对几何以及天文、音乐、算术等进行研究，把研究数学作为净化灵魂的手段. 他们证明了勾股定理，研究数论问题，发现了 $\sqrt{2}$, 证明 $\sqrt{2}$ 与 1 不可公度，引起了数学史上的“第一次危机”.

不可公度比问题刺激着古希腊数学家急切地思考离散与连续的关系，这方面值得提到大约公元前 400 余年到 300 余年以 Zeno 为首的 Elea 学派，他们提出了一些悖论，其中包括 4 个著名的数学 (运动) 悖论，对数学、哲学思想的发展都有深远影响.

公元前 479 年, 随着波斯人在 Mycale 战败, 雅典成为地中海地区最大的商业、文化中心, 包括各个学派的学者被吸引到了雅典, 崇尚学术自由辩论和大量学者的聚集，这个时期形成了雅典的巧辩学派 (sophist), 其研究范围远不止数学. 在数学上, 巧辩学派研究的中心内容之一是用数学来了解宇宙的运转，产生的许多数学结果都与“古典数学的三大作图难题”有关. 规定仅用无刻度直尺和圆规，三等分任意一个角 (三等分角问题); 作一个正方形使其与已知圆等积 (化圆为方问题); 作一个立方体使之具有已知立方体的 2 倍体积 (倍立方问题)[1]. 对这些问题的研究，产生了很多重要的数学思想和结论.

知名度最高的要数 Plato(柏拉图) 学派. Plato(公元前 427~347 年) 是那个时代最有学问的人，他本身不是数学家，但是热心于数学，并深信数学对于哲学和了解宇宙的重要作用. 雅典的 Plato 学院门口高悬警示牌：“不懂几何学的学生，禁止入内”，奠定了西方世界尊重数学的基础. 公元前 300 年左右， Plato 学派的数学重要活动中心移到亚历山德里亚 (Alexandria), 这里的学院派活动维持了 900 年之久. Plato 学派非常重视几何学与算术，发展了证明理论中的分析证明方法，与以往常用的综合证明方法相互补充；研究了数学方法论，用几何学方法总结古巴比伦的代数学；研究了正多面体理论及比例理论；发展了用演绎逻辑方法系统整理零散的数学知识的思想. 所有这些，都为 Euclid 《原本》的出现奠定了根基.

Euclid(约公元前 330~275 年), 在 Plato 学院获得教育，并在 AlexanclTia 城当教师授徒. Euclid 的伟大功绩在于，他将此前浩如烟海的几何学成果进行精心整理、归纳、升华，写成伟大著作《原本》 (Elements, 常称之为《几何原本》), 创立了欧氏几何学. 要使得如此浩瀚的知识系统化，按 Plato 学派的精神，必须以一定的科学原理和哲学认识论为依据，遵从任何科学命题都可以由一定的前提通过逻辑推理而得到的原则. Euclid 的《原本》成功地树立了数学演绎体系的最初典范，可以说是现今纯粹数学的原型. 所谓纯粹，就是不依靠经验而且不包括实际应用. 纯粹数学的任一命题都必须经过严格的演绎证明，而证明方法就是所谓的“公

1) 这三个问题包括 5 次以上多项式的公式解等问题，随着 Galois(1811~1832) 的研究成果的公布，利用后来发展起来的 Galois 理论，都已经被证明为不可能求解问题.

理法”. 《原本》不仅对几何学，而且对数学科学和所有的科学都产生了深远的影响. 自《原本》问世以来，经历 2000 余年而不衰，现今任何一个中学生仍然都要学习其一部分内容.

Euclid 的《原本》共分为十三卷，其内容不仅包括平面几何、立体几何，也包括数论等. 它不仅是对几何学作逻辑讲解的一本教科书，也是涵盖欧氏之前时代的一部数学史.

Euclid 的《原本》是一部公理法几何学. 他首先构造了一个由一些定义、公设和公理 (他把有关几何的公理称为公设) 构成的系统，然后由这个系统出发，演绎推导出其他各种结论，几乎包括了当时的全部几何成就.

遗憾的是， Euclid 的《原本》手稿已经失传，现今所说的《原本》都是根据流传下来的各种抄本整理的，公元 4 世纪 Alexanolria 城 Theon 的修订本是后来传世的主要底本，目前最流行的英文译本是 Thomas L. Heath(1861～1940) 的《 The Thirteen Books of Euclid’s Elements 》 (Cambridge, 1908). 对现代中学课本影响最大的是法国数学家 Joseph Louis Lagrange (1736～1813) 对《原本》的改编本.

我们依 Heath 的顺序，枚举 Euclid 《原本》第一卷的定义、公设与公理.

**定义**

1. 点是没有部分的那种东西.

2. 线是没有宽度的长度.

3. 一线的两端是点.

4. 直线是与其中各点看齐的线.

5. 面是只有长度和宽度的那种东西.

6. 面的边缘是线.

7. 平面是与其上直线看齐的那种面.

8. 平面角是在一平面内但是不在一直线上的两条相交线的相互倾斜度.

9. 当包含角的线是直线时，这个角叫做平角.

10. 当一条直线竖立在另一条直线上使得相邻的角彼此相等时，这每一个相等的角是直角，竖立在另一条之上的直线叫做垂直于它所竖立的直线.

11. 钝角是大于直角的角.

12. 锐角是小于直角的角.

13. 边界是物体的尽头.

14. 图形是被一个或多个边界包围的.

15. 圆是包含在一线里的那种平面图形，使得从其内某一点连到该线的直线彼此都相等.

16. 上述那个点叫做圆的中心，简称圆心.

17. 圆的一条直径是通过圆心而且两端终于圆周的任一直线，而且这样的直线也把圆平分.

18. 半圆是由直径和它所截得的圆周所围成的图形. 半圆的中心与圆心相同.

19. 直线形是由直线所围成的. 三边形由三条直线所围成，四边形是由四条直线围成，多边形由多于四条直线围成.

20. 在三边形中，三条边都相等叫等边三角形，只有两条边相等叫等腰三角形，三条边都不等的叫不等边三角形.

21. 在三边形中，有一个角是直角叫直角三角形，有一个角是钝角叫钝角三角形，三个角都是锐角的叫做锐角三角形.

22. 在四边形中，各边相等且各角都是直角的叫做正方形，各角都是直角而边不全等的叫长方形，各边都相等但角不都是直角的叫做菱形，对边相等而且对角相等但是边不全等的叫做长菱形，除此之外的四边形叫做不规则四边形.

23. 平行直线是在同一平面内向两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交的直线.

**公设**

1. 从任意一点到任意一点可以作直线.
2. 一条有限直线可以不断地延长.
3. 以任意一点为中心和任意直径可以画圆.
4. 所有的直角彼此都相等.
5. 若一条直线落在两直线上所构成的同旁内角的和小于两直角，把两直线无限延长它们将在同旁内角小于两直角的一侧相交.

**公理**

1. 与同一个量相等的量彼此相等.
2. 等量加等量，其和相等.
3. 等量减等量，其差相等.
4. 彼此重合的图形是全等的.
5. 整体大于部分.

在公元前，能够总结、创造出如此严密的系统，并由此演绎出整本几何学，确实是十分伟大的. 但是我们现在都可以看出，Euclid 的上述系统显然存在着缺陷. 事实上，在《原本》问世后的漫漫历史进程中，有许多数学家都注意到了这个系统在逻辑、叙述等方面的缺陷，对其中的一些定义进行修改，企图消除这些缺陷. 特别是企图删除或更改第五公设的努力，导致了非欧几何的产生，关于这点，我们将另行叙述.

除了《原本》， Euclid 还有其他一些著作，比如关于数学的《数据》、《图形的剖分》、《圆锥曲线》、《辩伪术》、《衍论》、《曲面轨迹论》，关于物理

学的《光学》、《镜面反射》和关于天文学的《现象》等, 其中大部分都已失传.

比 Euclid 稍晚一些而几乎属于同一时代的几何学家还有 Apllonius(约公元前 262 ~ 190 年), 他对几何学和天文学都有巨大贡献, 著有《圆锥曲线论》. 该书共有 8 卷, Euclid 失传的《圆锥曲线》的主要内容被收录于其前三卷中. 《圆锥曲线论》保存下来的前四卷为希腊文本, 五到七卷为阿拉伯文本, 第八卷已失传. 事实上, 对圆锥曲线的研究是推动几何学发展的主要动力之一.

## §5.2 从 Pappus 到射影几何学

与古希腊文明同时存在于世的是古罗马文明, 然而不幸的是, 数学并不受到信奉基督教的罗马统治者的欢迎, 数学家被归入 "占星术士" 一类, 而占星术却是被罗马君王所严禁的. 在公元前 750 年至公元 476 年这一千多年时间内, 罗马与希腊之间有过多次征战. 公元前 48 年, 罗马人攻到 Alexandria 城并烧毁谬司图书馆. 公元 398 年, 罗马人再次攻入 Alexandria, 再次烧毁重建后的谬司图书馆, 狂热的基督徒还以残忍的手段杀害了著名女数学家 Hypatia. 公元 529 年, 东罗马帝国以传授 "异端邪说" 为由, 关闭了 Plato 学院和其他希腊学校, 还在其法典中记载着 "关于恶棍、数学家" 的条款, 规定 "绝对禁止应受到取缔的数学艺术", 数学的 Alexandria 鼎盛时期宣告结束. 公元 640 年, 阿拉伯人攻占 Alexandria, 残留的数学典籍又遭到灭顶之灾, 认为这些典籍所包括的内容要么已经被古兰经所包括, 要么是违反古兰经的, 所以都不应该保留, 因此在长达 6 个月的时间内, Alexandria 的浴室都用这些典籍来烧水, 焚毁了全部典籍. 许多数学家逃离那里, 迁居波斯或君士坦丁堡, 使得数学文明得以留存. 另外, 在这一时期, 公元 476 年日耳曼灭了西罗马, 这些变革敲响了西方奴隶社会的丧钟, 宣告了封建黑暗的中世纪数学时代的开始.

Pappus(约公元 3 世纪) 的数学活动大约在公元 300 年至公元 350 年之间, 他是 Alexandria 后期最伟大的数学家. Pappus 的《数学汇编》是一部总结前人结果的著作, 该书共有八卷, 其中有部分已经失传. 该部著作提供了古希腊时期许多珍贵的数学资料, 给出了 Euclid 、 Apllonius 和 Archimedes (阿基米德) 的许多命题的新证法及辅助定理, 提出了许多新的发现和推广, 对古典数学著作进行了综述与评介, 被称为古希腊数学的大全. Pappus 把几何问题分为平面问题、立体问题和线性问题三类. Pappus 在这部著作中提出了其后属于射影几何学的例如交比、对合比等概念, 其第七卷的命题 139(本教材例 2.10, Pappus 定理), 成为射影几何学中的一个重要定理. 可以说, 射影几何从 Pappus 的工作开始萌芽.

从 Pappus 时代到公元 1100 年, 数学的发展基本上处于停滞状态. 其后十字军东征 (约公元 1100 至 1300 年) 使得欧洲获得了希腊的数学著作, 文艺复兴 (约公元

1200 至 1600 年) 带来了科学的再生．十五六世纪，作画、作图的需要而逐渐产生了透视法，由此人们发现，图形与其影像有着明显的不同但是又有着一些共同的几何性质． Girard Desargues(1591～1661) 首先对这些问题进行研究，引入了无穷远点、无穷远直线的概念；给出了 Desargues 透视定理及其逆定理；证明了交比在透视之下保持不变；对由 Pappus 引入的对合予以定名并进行研究，给出了 Desargues 对合定理；利用对合引入调和点组概念，并证明调和点组在透视之下仍然变为调和点组；对于圆锥曲线引入了极点、极线概念并进行了研究，从而创立了射影几何．

有趣的是， Desargues 是自学成才的，他首先当陆军军官，然后又当建筑师，他的主要著作《试论锥面截一平面所得结果的初稿》 (1639)，由于术语怪异，令人难以接受，许多人称他是个怪人． Descartes(笛卡儿) 先是怀疑他的工作，在得知其细节后又对 Desargues 倍加推崇， Fermat(费马) 称赞他的书思想丰富但一般人却不会欣赏，于是 Desargues 灰心丧气退休回家． Desargues 的朋友 Abraham Bosse(1602～1676) 在《运用 Desargues 透视法的一般讲解》中对 Desargues 的创造进行了通俗的介绍．

Desargues 的另一位朋友 Blaise Pascal(1623～1662) 是对射影几何做出贡献的第二个主要人物． Pascal 在微积分、概率论、物理等方面都有重要贡献，他甚至还是一位散文大师．他在 Desargues 的影响下也对透视法进行了研究，并写了关于圆锥截线方面的著作，关于二次曲线的著名的 Pascal 定理就是他的．

尽管 Desargues 和 Pascal 的工作意味着一个新的几何学的诞生，但是由于他们的工作都比较零散而无体系，且仍然建立于 Euclid 几何的基础之上，所以当时所有这些结果都被归入了 Euclid 几何的范畴．人们并没有认识到射影几何是研究射影变换不变量的科学，也没有认识到在添加无穷远元素之后，这个平面根本就不再是 Euclid 平面．此外，由于解析几何的蓬勃发展，代数与分析的方法统治着几何学研究， Desargues 和 Pascal 的工作很快就被人们忘却，射影几何的发展进入了低潮．

到 19 世纪， Gaspard Monge(1746～1818) 和 Lazare N. M. Carnot(1753～ 1823) 等开始复兴综合几何．在他们的影响下， Jean Vicotor Poncelet(1788～1867) 投身于射影几何的复兴之中． Poncelet 毕业于巴黎工科大学， 1812 年在拿破仑远征军当工兵营中尉，兵败后成为俄罗斯战俘， 1813 年被关进俄罗斯监狱．在监狱的艰苦条件下， Poncelet 开始回忆大学数学知识，并用从火盆里偷偷留下的一些木炭条，在墙上画图研究射影几何，后来终于设法弄到一些纸，将这些研究成果记录下来． 1814 年 6 月，他带着 7 大本 “狱中笔记” 被释放回法国．回国后，他又到工程兵部队担任上尉，利用工作之余，整理他的研究成果，写成著作《论图形的射影性质》， 1822 年在巴黎出版．之后 Poncelet 又对该书进行修改、扩充，定名为《分析学与几何学的应用》于 1862 至 1864 年分为两卷出版．这些著作将 17 世纪关于

射影几何的不成体系的结果发展为一般理论，奠定了射影几何学的基础，使得射影几何成为数学的一个新的分支，因此可以说 Poncelet 是近世综合射影几何的奠基人． Poncelet 是综合几何的热心支持者，尽管承认分析学的威力，但是他相信能够赋予综合几何学以同样的威力．

Poncelet 提出，射影几何就是研究图形在射影变换下的不变性的几何学，他确立了射影几何中一个基本不变量为交比． Poncelet 在射影几何方面的建树主要是提出了三个方面的观念．第一，他将连续有限次透视对应构成的链作为射影对应，确立其作为研究射影性质的基本途径．第二，他提出了“连续性原理”，他在《论图形的射影性质》中指出：“如果一个图形是从另一个图形经过连续变化得到，并且后者与前者也一样地一般，那么马上可以断定，第一个图形所具有的任何性质第二个图形也有．”但是如何判定两个图形都是一般的呢？他没有解释．他用这种原理证明了许多结论，并引申这个原理到各种虚的图形．尽管这种连续性原理被人们承认在直观上是明显的，尽管 Poncelet 本人在“狱中笔记”里作过分析方法的检验，但是并没有得到严格的证明，巴黎科学院的一些院士包括 Augustin Louis Cauchy(1789～1857) 对这个原理持批评态度，但是连续性原理在实用中确实是有效的．第三，他给出了关于圆锥曲线的极点与极线的一般表达，并用作为建立许多定理的方法． Poncelet 研究关于圆锥曲线配极的一个目的就是为了建立对偶原则，因为在他之前人们就已经注意到对偶现象，他试图利用配极来确立对偶原则．后来经过与 Joseph Diez Gergonne(1771～1859), Möbius, Chasles, Plücker 等进行讨论，弄清了配极与一般对偶之间的关系，但是还没有能够给出对偶原则的逻辑证明．

Jacob Steiner(1796～1863) 接受了 Poncelet 的影响，偏爱综合方法而嫌恶分析学，他推进了综合射影几何的发展．他是瑞士农民的儿子，19 岁之前一直在农场干活，靠自学而成了柏林的教授．主要著作有《几何形的相互依赖性的系统发展》，他运用射影的概念从简单的结构 (如点、线、点列、线束等) 创建出更为复杂的结构，他的结果不是特别新的，但是他的方法是新的．他一开始就用对偶原则，利用点列、线束将圆锥曲线的定义对偶化，引入了线曲线概念，使得射影几何作为一门学科向着系统化方向有了新的迈进． Michel Chasles(1793 ～1880) 也是那一时期对射影几何的发展做出贡献的人，著有《论高等几何》、《论圆锥曲线》等．

从 Desargues 到 Chasles, 射影几何里都使用了长度概念，但是长度却不属于射影几何，因此射影几何学与 Euclid 几何学的逻辑关系并不清楚． Erlangen 大学的 von Staudt(1798～1867) 对改变这种现象做出了努力．他在著作《位置的几何学》中提出了一种方案叫“投的代数”，在射影的基础上引入了一种类似于长度的概念，得到了类似于现在的非齐次射影坐标的东西，但是在连续公理还远远没有出现的当时，这种方案只能是不严密的． von Staudt 在引入这个概念之后，对交比进行了解析的表示，即为现在所使用的格式． von Staudt 的主要贡献是指明了射

影几何其实比 Euclid 几何还要基本，显示了射影几何是与距离无关的学科.

用代数法研究射影几何主要归功于 Augustus Ferdinand Möbius(1790∼1868) 和 Julius Plücker(1801∼1868). 他们引进了齐次坐标概念，实现了射影几何内容的代数表达. 特别地， Plücker 对于用代数来处理对偶性的努力使他得到了齐次线坐标概念，利用这些，他给了对偶原则以代数表述和证明. 代数方法的引入，更推动了射影几何的发展.

Plücker 等人还对高次平面曲线和高次曲面进行了研究.

使得射影几何达到登峰造极的是 Felix Klein(1849∼1925). 从 Poncelet 开始，人们就已经感到射影几何应该是比欧氏几何更为基本的几何学，但是其逻辑关系并不明确. 有许多数学家其中包括 Edmond Laguerre(1834∼1886) 和 Arthur Cayley(1821 ∼1895), 他们试图利用射影概念来建立 Euclid 几何度量. 同时，在这一时期内，形形色色的非 Euclid 几何不断诞生，所有这些几何学之间，究竟应该具有怎样的逻辑联系，这是受到大家关注的问题. Klein 通过选择绝对形，利用射影几何导出了 Euclid 几何以及双曲、椭圆等非 Euclid 几何的度量，从而说明了射影几何在逻辑上独立于 Euclid 几何，而且 Euclid 几何与非 Euclid 几何都可以看着射影几何的特例或子几何. 1872 年 Klein 被接纳进入 Erlangen 大学教授会，发表了题为《近代几何研究的比较评述》的讲演，提出了著名的变换群观点，不再仅基于非度量和度量的性质以及各种度量间的区别，而是基于变换群作为特征来刻画几何学. 他在讲演中列举了当时存在的各种几何学的变换群，给出了对应各变换群的几何学及其不变量，对这些几何学进行了分类比较，这个讲演后来被称为 Erlangen 纲领. Klein 的纲领不仅把 Euclid 几何与非 Euclid 几何，而且也把代数几何、拓扑学等都归入了射影几何门下，这个纲领对几何学产生了长达半个世纪的影响，所以 19 世纪曾有句名言称：“一切几何学都是射影几何学”. 在 Klein 之后，尽管几何学的发展使得他的分类有增加和细分的可能，但是随着科学的进步 Erlangen 纲领最终还是无法做到包罗一切，至少现代许多新的几何学都不能被置于 Klein 的方案之中.

## §5.3　Descartes 与解析几何学

René Descartes(1596∼1650) 是西方近代哲学家，近代生理学的奠基人，是一流的物理学家，只偶然地是个数学家，但是他的名字在数学书籍中出现的次数一点也不比别的数学家少. Descartes 出身于一个富有的律师家庭，大学毕业后做过律师，当过兵，并受聘当过瑞典女王的教师. 与 Descartes 分享解析几何的创始人还有 Pierre de Fermat (1601∼1665), 有趣的是 Fermat 的职业也不是数学而是律师，但却享有业余数学家之王的美誉. 他在数学中最著名的贡献是作为代数数论、代数

几何等分支创建和发展动力的 Fermat 大定理 [1)]. 此外，由于各种媒体的介入，一个 Fermat 大定理牵动了全世界人的心，所以现今知道 Fermat 的人恐怕不会比知道 Descartes 的少，但却可能并不知道 Fermat 对解析几何的贡献.

Descartes 和 Fermat 对解析几何的贡献都是从探寻曲线研究的一般方法开始的.

Descartes 通过哲学、自然科学和应用三个途径来研究数学. 他追求两大目标，一是研究并总结随着力学进步而发展起来的数学方法；二是运用这种统一的方法论去构造一个能说明整个哲学、数学、物理学、天文学以及生理学等各个领域问题的宏大平台，后一个目标他并没有能够实现，但是他对哲学、数学和科学都做出了不可磨灭的贡献.

由于 Descartes 对方法的兴趣和具有专门的代数知识，加之要实现应用的目标，于是他将方法应用于几何，也就是把代数应用于几何. 他不满意 Euclid 几何学，认为它过于抽象，过多地依赖图形，每一个证明总是需要某种新的、往往是奇妙的技巧，说 "它只能使人在想像力大大疲乏的情况下，去练习理解力". 他也不满意代数学，批评它 "成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术，而不像一门改进思想的科学". 他表示： "我想应当去寻求另外一种包括这两门科学的优点而没有它们的缺点的方法"，于是他积极思考、研究，据称是由 1619 年 11 月 10 日夜在军营里的三个梦境而获得魔钥，他 "开始懂得这惊人发现的基本原理"，得到了建立解析几何的线索.

Descartes 关于解析几何的研究成果总结于他的著作《几何学》中. 该书共有三卷，第一卷是关于 "仅用圆和直线的作图问题"；第二卷是 "论曲线的性质"；第三卷是 "关于立体与 '超立体' 的作图". 第一卷实际上是利用代数的方法来求解几何问题，不再拘泥于 $a, b$ 等表示线段、 $a^2$ 表示正方形的面积、 $ab$ 表示长方形的面积等传统观念，放手让表示线段的字母参加代数的四则运算和开方，由解方程可以求出未知的线段，即把未知线段用已知线段表出，然后再回到几何学中把未知线段作出. 之后，从求解 Pappus 的一个问题入手，得到了关于 $x$ 与 $y$ 的二次方程，于是就有了坐标系和曲线的方程概念，可惜他的坐标系基本上局限于第一象限. 进而，他又在同一个坐标系考虑两条不同的曲线，并联立两个方程求出这两条曲线的交点. 《几何学》的第二卷是研究曲线. 希腊人把曲线分为平面曲线、立体曲线和线性曲线，平面曲线就是可以用圆规和直尺作出的曲线，立体曲线是圆锥曲线，而其他都是线性曲线. Descartes 改造了这种观点，他将曲线分为几何曲线和机械曲

1)Fermat 大定理即不存在正整数 $x, y, z$ 以及 $n > 2$ 使得 $x^n + y^n = z^n$. 该定理于 1994 年由 Andrew Wiles 和 R. L. Taylor 给出了证明，见 A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. 141(3)(1995), 443−551; R. L. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties*, Ann. Math. 141(3)(1995), 553−572.

线两种，几何曲线就是可以惟一地用含 $x$ 与 $y$ 的有限次代数方程来表示的曲线，其余都是机械曲线 [1)]．Descartes 进一步考虑了几何曲线的分类，他按曲线方程的次数分类，一次的和二次的为第一类，并指出圆锥曲线是二次的；三次方程的和四次方程的为第二类；五次、六次为第三类；…… 每一类中，他认为高次的那个可以化为低次的，正如四次方程的解可以通过三次方程的解来求出，这当然是不对的．第三卷再次回到解决几何作图问题，即解决用代数语言叙述时，要用到三次和高次方程，并且需要用到圆锥曲线和高次曲线那些几何作图问题．但是实际上，尽管他所求解的未知量满足三次或高次方程，而作图法却仍然与希腊时期并无二致． Descartes 还指出，多项式 $f(x)$ 的零点个数至少与它的次数相同，而且仅当 $a$ 是 $f(x)$ 的零点时， $f(x)$ 才可以被 $(x-a)$ 整除．他提出的“待定系数法”至今还是一种重要方法．

Descartes 的伟大贡献在于他创建了曲线与方程相结合的方法并引入了变数概念．正如恩格斯在《自然辩证法》中指出：“数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．”《几何学》一书写得简略而且难以读懂， Descartes 认为，他的工作好比是建筑师，他负责制定计划而把手工操作部分留给那些木工和瓦工．他说：“对于那些自命为无所不知的人，如果我写得能让他们充分理解，他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西．”他之所以删去绝大多数定理的证明，是认为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查书中的例题，一旦弄清楚这些例题，一般定理的证明就是显然的了，而且这样学习是更为有益的．事实上，后代人对 Descartes 在《几何学》中所反映的思想要比对该书本身重视得多．

《几何学》出版后受到了 Fermat 的批评，他说书中删去了极大值和极小值，曲线的切线以及立体轨迹的作图法，而这些是值得所有几何学家注意的．确实从现代观点来看， Fermat 强调轨迹方程是更为恰当的． Fermat 著的《轨迹引论》直到他去世后才于 1679 年出版．

Descartes 与 Fermat 之后，坐标几何没有很快被人接受，发展缓慢．一方面，Descartes 坚持要把他的书写得让人读不懂；二方面，数学家们不能接受或者反对将几何与代数混为一谈；再者，当时的代数还被人认为缺乏严密性，也许这些因素合在一起制约了坐标几何的发展．当然也还有一些数学家在逐渐地采用和完善坐标几何思想，包括 van Schooten(1615～1660), John Wallis (1616～1703), Isaac Newton(1642～1727), James Bernoulli(1655～1705), La Hire (1640～1718) 等，都在这一时期对坐标几何的完善与发展做出过贡献， Newton 和 James Bernoulli 对于特殊的曲线引入了极坐标系， 1729 年 Jacob Hermann(1678～1733) 正式宣布极坐标

1)Gottfried Wilhelm Leibniz(1646～1716) 将代数的、机械的曲线分别称为代数曲线和超越曲线．

系方法是普遍可行的，可以用来自由地研究曲线，并给出了由直角坐标到极坐标的变换式.

到 18 世纪，平面解析几何得到了广泛的探讨并趋于完善. 随着物理学的发展，对空间解析几何的需要越发迫切. 三维坐标几何在 Fermat, Descartes 和 La Hire 的著作中已经初见端倪， 18 世纪数学家首先对三维坐标系进行改善. 经过 Antoine Parent(1666∼1716), John Bernoulli (1667∼1748), Alexis-Claude Clairaut(1713∼1765) 和 Jacob Hermann, Leonhard Euler (1707∼1787) 等人的贡献，空间解析几何得到了充分的发展，不仅研究了各种空间曲面和曲线，也研究了高次平面曲线.

## §5.4 第五公设之争与非欧几何学

自从公元前 3 世纪 Euclid 的《原本》问世，数学家包括 Euclid 本人，都对《原本》的第五公设即平行公理不满意. 开始并没有人怀疑它的真理性，仅仅对于它的叙述格式不喜欢，后来就不断地有人希望能够对第五公设做点什么，主要工作可概括为两个方面的尝试. 第一是试图改变这个公理的叙述，当然这还包括了对 Euclid 的有限直线如何延长和最终认为可以延长至无限的讨论，于是经过逐渐的演变，得到了第五公设的等价叙述，即在现今中学几何课本上能够见到的平行公理：过平面上直线外一点有而且只有一条直线平行于已知直线. 第二方面的尝试是第五公设是否为多余的，即它能否由其余 9 个公理推导出来，最终发现如果要推导出平行公理，就得加进除原有公理以外的其他公理，因此无法从其余 9 个公理推导出平行公理. 长期努力而徒劳无功，令人十分恼火，甚至有人把第五公设问题称为 “几何原理中的家丑”. 我们不再一一列举对这些讨论做出过艰苦努力的历代人士的名字. 但是，正是由于这些讨论中所萌生的某些启发，终于导致非 Euclid 几何以不可阻挡之势横空出世.

非欧几何的创始人之一 Nikolai Ivanovich Lobatchevsky(1793∼1856) 出身于俄罗斯 Novgorod 一个贫苦小职员家庭. 他 7 岁丧父，在母亲的抚养下，自幼聪明好学才思过人， 15 岁考入帝国 Kazan 大学数学 – 物理系， 19 岁获得硕士学位留在 Kazan 大学任教， 22 岁升为副教授， 24 岁升为教授，之后他于 1820 年到 1825 年担任 Kazan 大学数学 – 物理系主任， 1827 年到 1848 年担任 Kazan 大学校长，还被选为 Göttingen 科学协会通讯会员，他的学术活动和巨大贡献奠定了 Kazan 大学兴盛和光荣的基础. Lobatchevsky 被后人誉为 “几何学上的哥白尼”，为纪念这位伟人， 1893 年在 Kazan 竖立了 Lobatchevsky 的纪念像.

Lobatchevsky 起初也曾尝试 “证明” 第五公设，但是很快发现证明是错误的. 于是他另辟蹊径，假定 “过直线外一点可以有不止一条直线与已知直线不相交”，并以此代替第五公设进行演绎推导. 定义过直线外一点在两个方向上与已知直线

不相交的直线中的极限直线为在各个方向上与已知直线平行的直线，并引入了平行角的概念. 经过推导，他得到了一系列前后连贯的命题，构成了逻辑上没有矛盾但是又与 Euclid 几何完全不同的另外一种几何学系统，他称这个新的几何学系统为“虚几何学”. 在这个几何学中，三角形的内角和不再是 180 度，而是小于 180 度甚至不同的三角形有不同的内角和；凸四边形的内角和不再是 360 度，而是一律小于 360 度；不存在矩形，也不存在相似形；只要两个三角形的三对对应角相等，这两个三角形就全等；两条平行线之间的距离不再处处相等，而是沿着平行线的方向越来越小；垂直于一个锐角一条边的直线与该锐角的另一条边不一定相交；…… 如此等等，匪夷所思，与人们所能看到的物理空间相比，简直就是一种虚幻之境. 1826 年 2 月 23 日， Lobatchevsky 在 Kazan 大学数学 – 物理系的学术会议上宣读了他的论文《几何原理概述及平行线定理的严格证明》，这一天被认为是非欧几何诞生的日子. Kazan 大学将他的论文交付审查，结果是石沉大海，连原稿也遗失了. Lobatchevsky 仍然继续他的研究， 1829~1830 年在 Kazan 大学学报上发表了《论几何基础》， 1835~1837 年间又在该学报上发表了论文《具有平行的完全理论的几何新基础》， 1837 年用法文发表了《虚几何学》， 1840 年用德文写成专著《平行理论的几何研究》，向国外介绍他的新学术，这是 Lobatchevsky 影响最大的一本专著.

Lobatchevsky 的新几何学术违背了 2000 余年的传统，动摇了神圣不可侵犯的 Euclid 几何权威，也违反了人的视觉常识，他的论述发表后，遭到了社会上和学术界百般攻击甚至侮辱、谩骂，俄国科学院不接受他的论文，大主教宣布其学说为“邪说”，权威们说他是“疯子”，指责他的学说是“荒唐透顶的伪科学”，是一场“笑话”. 尽管如此， Lobatchevsky 毫不畏惧，坚信自己的学说是正确的，他逝世前一年，在双目失明的情况下，还用口授的方法，写成了俄、法两种文字的非 Euclid 几何著作《泛几何学》. Lobatchevsky 的学说直到他去世近 20 年后才得到世人的承认，把他的学说称为“ Lobatchevsky 几何学”.

发现和创立非 Euclid 几何学的还有 Carl Friedrich Gauss(1777~1855) 和匈牙利的 John Bolyai(1802~1860). Gauss 在 19 世纪初期也曾企图证明 Euclid 的第五公设，大约在 1816 年左右就发现了非 Euclid 几何的原理，但是没有发表. 按照 Gauss 的说法，他永远也不愿意发表这方面的成果，因为怕“ Beotians 人的嚷嚷”即怕被凡夫俗子们耻笑，但是 Gauss 在这方面的研究并没有终止，他甚至不辞辛劳地亲自去测量由三个相距遥远的山峰所构成的三角形的内角和，以验证 Euclid 几何与他的非 Euclid 几何在实际应用中的差别. 当然，由于测量误差，其结果不能说明问题. Gauss 在这方面的许多研究成果是在他去世后从手稿、书信中发现的. Gauss 在 1846 年 11 月 28 日给他的朋友 Schumacher 的信中说：“不久以前，我有机会再次读到 Lobatchevsky 的论文， ……Lobatchevsky 称之为‘假想的’几何

学．您知道，我对此有同样的观念已经有 54 年了．从那时起，并没有任何改变，这种观念使我获得这个论题的思想．在 Lobatchevsky 的著作中，我没有找到对自己是新的东西，但是他的叙述却与我的不同，作者叙述了作为一个真正几何学家所提出的论题．我建议您研究一下这样的著作，它会使您得到益处．”

Bolyai 是一个匈牙利军官，他的父亲是 Gauss 的朋友． Bolyai 从青年时代起就醉心于平行公理的证明，终于建立了非 Euclid 几何．在 1823 年 11 月 23 日给他父亲的信上说：“我已经从乌有中创造了另一个新奇的世界．”当他父亲把 Bolyai 的研究成果写信告诉 Gauss 后， Gauss 感到十分地吃惊，回信说：“这和我 40 年来沉思的结果不谋而合”． Bolyai 看到回信，反而怀疑 Gauss 剽窃他的成果，从此消沉，不再研究这一问题． Bolyai 将他发现的非 Euclid 几何称为绝对几何，所写论文《绝对空间的科学》作为其父一本著作的附录于 1832～1833 年出版， Bolyai 的研究工作与 Lobatchevsky 的十分地相像．当 Bolyai 第一次看到 Lobatchevsky 的著作时，他认为那是抄袭了他自己的文章．而当 Gauss 读到 Bolyai 的文章后，在给 Bolyai 父亲的信中说，他不能称赞那篇文章，因为否则就是称赞他自己的工作．总之，如果不是 Gauss 的谨慎，没有 Bolyai 的消沉，非 Euclid 几何也许会提早一些年出现．

随着晚些时候 Riemann 几何的出现，数学家们开始讨论非 Euclid 几何的模型曲面以及相容性问题．Eugenio Beltrami(1835～1900), Jules Henri Poincaré (1854～1912), Felix Klein 等在这方面做出了贡献，他们的工作使得非 Euclid 几何得到了数学界的普遍承认，非 Euclid 几何尤其是 Lobatchevsky 几何不再是虚幻的想像中的东西，而是实实在在的一种几何学．他们研究了这些几何学之间的关系，把 Euclid 几何称为“抛物几何”，把 Lobatchevsky 几何称为“双曲几何”，而把 Riemann 几何称为“椭圆几何”，这三种几何学就其空间而言，所不同的仅仅是曲率而已，或者按 Klein 的观点仅仅是变换群不同而已．

非 Euclid 几何学的创立被认为是 19 世纪所有复杂的技术创造中最为深刻的一个，是继希腊时代以来数学中一个重大的革新．其深刻之处在于使得数学家们从根本上改变了对数学的性质的理解，改变了对数学与物质世界的关系的理解，引发了一些新的重要数学分支，引发了关于数学基础的许多问题，这些问题到了 20 世纪仍然处于争论之中．

## §5.5 Gauss, Riemann 与微分几何学

作为继 Euclid 几何学之后数学中的一个最大的创造，从 17 世纪起，两位巨匠 Newton, Leibniz 的名字就与他们创立的微积分学一起永载史册．微积分学的创立不仅为科学的进步打开了闸门，也为数学本身的发展打开了视野，提供了十分奇

妙的思想和工具. 随着微积分的创立和解析几何的发展, 微分几何的历史也就开始了.

微分几何这一术语是由 Luigi Bianchi(1856～1928) 在 1894 年首次使用的. 实际上, 微分几何尤其是古典微分几何在很大程度上是微积分本身问题的自然产物. 17 世纪后期起, 微积分被用来解决很多实际问题, 比如关于平面和空间曲线的曲率, 曲线族的包络, 曲面上的测地线, 光线以及光的波阵面的研究, 沿曲线及曲面受约束运动的动力学问题, 地图绘制等等, 促使了微分几何学科的诞生和迅速发展.

在开始阶段到整个 18 世纪, 微分几何的分析味还不够浓厚, 大家都把几何论证与分析论证结合在一起. Christian Huygens(1629～1695) 在《钟表的振动》中提出并研究了曲线的渐开线, 随后他又研究了渐屈线, 并给出了曲线在一点处的曲率中心和曲率半径, 对其进行了分析的表达. Newton 在他的《解析几何》中也引进了曲率中心和曲率半径, 并提出了密切圆的概念. John Bernoulli 也对平面曲线展开研究, 得到了关于包络的一些结果.

Alexis-Claude Clairaut 以空间曲线理论的研究开创了三维微分几何的重大发展. 他 16 岁时出版了《关于双重曲率曲线的研究》, 17 岁入选法国科学院. 他称空间曲线为双曲率曲线, 考虑空间曲线在两个垂直平面上的投影, 于是将空间曲线的曲率分解为两条平面曲线的曲率. 他还得到了空间曲线的弧长表达式以及求一些曲面面积的公式.

Euler 也对空间曲线进行了研究, 他用曲线的弧长作参数给出空间曲线的参数方程, 对 Clairaut 提出的两个曲率中的一个完成了标准化. 另一个曲率后来称为扰率, 由 Michel-Ange Lancret (1774～1807) 求出了其显式表示, 并对曲线任一点处定义了主切线、主法线和次法线三个主方向, 于是扰率即为曲线在次法线方向关于弧长的变化率. Cauchy, Alfred Serret(1819～1885), Frédederic-Jean Frénet(1816～1900) 利用方向余弦、弧长微分研究了空间曲线, 给出了关于曲率、扰率的三个著名的 Serret-Frénet 公式.

空间曲面理论始于曲面上测地线的研究, John Bernoulli, James Bernoulli, Euler 都对此做出了贡献. 1760 年 Euler 在其著作《关于曲面上曲线的研究》中建立了曲面的理论. Gaspard Monge(1746～1818) 独立地研究了可展曲面问题, 他在三维微分几何方面的贡献远远超过 Euler, Monge1807 年出版的《分析在几何学上的应用》是数学史上第一本系统的微分几何论著. 在 Monge 的研究中, 分析与几何是相辅相成的, 他主张对于一个问题要从几何与分析两个方面考虑, 并以其研究实践说明这点, 这对于鼓励纯粹几何的复活起到了积极的作用. Monge 被认为是继 Desargues 之后在综合几何方面第一个真正的革新者. Monge 在画法几何、解析几何、微分几何、常微分方程和偏微分方程等数学领域中都有著名的贡献, 此外

在物理学、化学、冶金学和机械学等方面他也都做出了贡献. Monge 是一个伟大的教师，他曾组织和领导了一个几何学派，他的学生中至少有十多人为 19 世纪早期最著名的人物，据信巴黎高师即起源于 Monge 创办的一所高等师范学校 (Ecole Normale). Monge 不仅对可展曲面进行了深入研究，还在曲面族研究中作出了对偏微分方程具有重要意义的工作.

近代数学的奠基人之一、数学王子 Carl Friedrich Gauss(1777～1855), 关于他怎样神速地计算出从 1 加到 100 的故事广为流传，他的一生在数学的数论、几何、分析、代数、统计等方面都有突出的贡献，数学家们评论说："在数学世界里，Gauss 处处留芳". Gauss 认为，除了哲学以外，数学是人类知识发展的主要工具，数学是科学之王. 他不仅是伟大的数学家，而且在天文学、物理学、大地测量学等自然科学领域都有卓越的贡献. Gauss 自 1816 年起就在大地测量、地图绘制等方面做了大量的工作，发表了很多文章，激起了他对微分几何的兴趣. 1827 年他发表的文章《关于曲面的一般研究》开创了近代微分几何的先河. Euler 曾提出空间曲面上任一点的坐标可以用两个参数来表示的思想，这样，类似于用单参数参数方程表示空间曲线，可以把空间曲面表示成双参数的参数方程. Gauss 从这点出发对曲面理论进行了系统研究，推证出弧长微分，曲面上两曲线之间的夹角，曲率，测地线等等内在性质与曲面所在的三维空间无关. 于是提出了两个重要的思想，首先是曲面本身可以看作一个空间，因为其性质完全被弧长微分所确定，但是如果把曲面本身看成空间，它具有哪一种几何学呢？若把测地线看作曲面上的直线，则这个几何学是非 Euclid 的. 其次，随着弧长微分式中不同的参数函数的选取，可以在同一个曲面上得到不同的几何学，进而在三维空间中选取弧长微分的不同表达式就可以得到该空间中不同的几何学.

把 Gauss 在几何学中的创造性思想推广到任何空间，是由 Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826～1866) 继承并发展的. Riemann 出身于德国一个清贫而和睦的家庭， 6 岁上小学， 14 岁入大学预科， 19 岁进入 Göttingen 大学，在 Gauss 指导下取得博士学位. 在博士学位论文中，他引入了 Riemann 曲面概念，确立了复变函数几何理论的基础. 1859 年，他的论文《在给定大小之下的素数个数》引起数学界的轰动，该文提出著名的" Riemann 猜想"后来在 Hilbert 的 23 个问题中被列为第 8 问题. 他在 Göttingen 大学从编外讲师到副教授最后当教授，面对贫寒生活却不放弃为科学而奋斗，短暂而光辉的一生仅有 39 岁，但是他的研究工作却几乎影响每一个学科，他将数学向前推进了几代人的时间，以他的名字命名的数学术语众多，比如" Riemann 猜想"，" Riemann 假设"，" Riemann 问题"，" Riemann 曲面"，" Riemann 映射定理"，" Riemann 几何"，" Riemann 四指标记号"，" Riemann $\zeta$ 函数"等等，他对数学与科学的贡献是十分巨大的. 1854 年， Riemann 为了取得 Göttingen 大学教授资格，由 Gauss 指定以几何基础作为

题目向全体教员发表讲演，该讲演在 1868 年以《关于作为几何学基础的假设》为题发表． 1861 年， Riemann 为竞争巴黎科学院的奖金写了一篇关于热传导的文章，后称为《巴黎之作》，该文对他前述讲演中关于几何学的研究作了进一步的加工．这些工作宣布了 19 世纪重大创造之一 Riemann 几何的诞生， Riemann 几何不仅包括 Euclid 几何和许多非 Euclid 几何为其特例，而且引起了整个空间观念的深刻变革．由 Gauss, Lobatchevsky, Bolyai 等的工作，引起人们思考这样的问题，关于物理空间的几何我们可以相信一些什么？于是 Riemann 重新考虑研究空间的整个途径．他认为 Euclid 的几何公理与其说是自明的，不如说是经验的，依靠分析我们可以从关于空间无疑是先验的东西出发而导出必然结论． Riemann 将 Gauss 关于 Euclid 空间中曲面的内蕴几何学发展到任一空间的内蕴几何学． Riemann 把 $n$ 维空间称为一个 $n$ 维流形，用 $n$ 个可变参数的一组指定的特定值表示 $n$ 维流形中的一个点，这 $n$ 个可变参数称为流形的坐标，当这些参数连续变化时，对应的点就遍历整个流形．他提出了流形的曲率概念，流形曲率可以由一些量来定义，而这些量完全由流形自身所确定，从而无需把流形想像成位于某一更高维的流形中，并试图通过它去刻画 Euclid 空间和更一般的空间，在这种空间中图形可以挪动而不改变其形状和大小．他在对常曲率流形研究后得知，正曲率的流形对应一个球面空间，零曲率流形对应一个 Euclid 空间，他也提及可能有负的常曲率曲面存在的可能性 (即后来的伪球面)．他认为， Euclid 几何的公理只能是物理空间的近似写照，他与 Lobatchevsky 一样，都相信天文学将判定哪种几何更符合于空间．

果然，到了 20 世纪， Albert Einstein(1879～1955) 在花了数年的时间，试图形成引力实际上只是空间的曲率这种可能性的时候，却不知道如何从数学上加以表达，于是求助于他的朋友数学家 Marcel Grossmann(1878～1936), 说：“ Grossman, 你必须帮助我，否则我会发疯的． ” Grossman 告诉他 Bernhard Riemann 有关弯曲空间的工作成果已经于 60 年前完成且正待使用. 这才使得伟大的物理学家 Einstein 没有发疯而得出著名的公式 $E = mc^2$, 发明了伟大的广义相对论．

Riemann 逝世后两年， 1868 年他的论文发表激起了数学界的强烈兴趣，许多数学家开始忙着去充实他所概述的思想并加以推广． Riemann 的直接继承者 Eugenio Beltrami(1835～1900), Elwin Bruno Christoffel(1829～1900) 和 Rudolph Lipschitz (1832～1903) 等对他的思想进行了进一步的发展，对微分形式和微分形式的不变量进行了深入的研究．

在 Riemann 及其继承者关于微分形式的不变量研究的基础上，Gregorio Ricci-Curbastro (1853～1925) 与他的学生 Tullio Levi-Civita(1873～1941) 开展了为几何性质和物理规律的表达式寻找一种在坐标变换下不变的形式的研究，于 1901 年发表了一篇总结性文章《绝对微分法及其应用》，他们的研究成果后被 Einstein 称为张量分析．他们提出了协变张量，反变张量，协变微分等概念，证明了张量的相等

与坐标系无关, 将许多复杂的分析运算过程变成了关于张量的形式运算. 张量的性质在相对论中有重要意义, 在相对论中, 每个观测者都有自己的坐标系, 而客观的物理规律是对所有观测者都成立的规律, 为了反映与坐标系的无关性, 这些规律都表示为张量. 利用张量概念, Riemann 几何中从空间曲率到其他许多概念都可以表示为张量形式, 而 Einstein 的空 – 时 Riemann 几何曲率正是利用了 $n = 4$ 时的张量形式. 广义相对论对数学本身的触动是使得人们对张量分析和 Riemann 几何兴趣的增长. 1917 年 Levi-Civita 引进了向量平移概念, 将平行向量概念引入 Riemann 几何空间, 建立了利用平行向量来描述各种空间曲率的方法.

之后, 经过数学家们的共同奋斗, 微分几何学不断取得新的发展. 到了 Elie Cartan(1869～1951), 以联络概念为基础, 利用李群和他创建的外微分法为工具, 研究空间或流形的性质, 又把微分几何的研究推进到了一个新的阶段.

## §5.6 从 Cantor 和 Poincaré 到拓扑学

"拓扑" 一词是原文 topology 的音译. 拓扑学起源于 19 世纪, 大发展于 20 世纪. 起初, 这门学科被人们称为 "位置分析", 后来才称为拓扑学, 它是几何学的一个新分支. 粗略地说, 拓扑学是研究图形在弯曲 (不得自身穿越) 、拉伸 (不得断裂) 之下保持不变的性质的几何学, 所以经常通俗地称拓扑学为 "橡皮膜几何学". 从数学的角度说, 若一个双射满足它与其逆都是连续的, 则称这个双射为一个 "同胚", 拓扑学是研究图形在同胚变换下不变性的科学, 早在 1872 年 Klein 的 Erlangen 纲领中, 就已经对拓扑学这一重要的新领域进行了勾画. 到 20 世纪, 拓扑学被分成点集拓扑, 代数拓扑, 还有微分拓扑等等分支.

要介绍拓扑学, 我们首先要从 Cantor 及其创立的集合论谈起. 现今大家都承认, 集合论是现代数学各科不可或缺的基础, 可是它从诞生到受承认却经历了艰苦的过程. Georg Cantor (1845～1918) 生于俄国后随父母迁居德国, 1863 年进入柏林大学, 1867 年获得博士学位. 1869 年担任 Halle 大学讲师, 1879 年担任该校副教授, 旋即升为教授. 1874 年 Cantor 29 岁时在《数学杂志》 (Journal für Mathematik) 上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性论文, 标志着集合论的诞生. 之后, Cantor 又继续发表有关集合论和超限数方面的论文直到 1897 年.

19 世纪下半叶, 随着数学分析的严密化, 促使人们必须弄清楚实数集合的结构, 而这方面的拦路虎就是无穷这个概念. 从希腊时期开始, 人们就一直为无穷所困惑, 不少人为之奋斗, 或者得到种种悖论, 或者因为 "不可理解" 而放弃, 或者卷入形而上学甚至归到神灵那里去. Cantor 勇敢地向这一神秘莫测的领域发起挑战, 他定义了集合, 并定义能够与它的真子集构成一一对应的集合为无穷集合. 他引入可数概念, 并证明不仅有理数集是可数的, 而且代数数集也是可数的, 但是

实数集不是可数的．他不仅向人们展示了实数集可以和一条线段内部的点一一对应，而且一厘米长的线段内部的点居然能够和太平洋内的点、和地球内部的点一样多！于是他就研究无穷集合的基数，他用 $\aleph_0$ 来表示自然数集合的基数 (其中 $\aleph$ 是西伯来字母), 这个数不同于一般的无穷大．接着用 c 来表示实数集的基数 (连续统 Continuum 的第一个字母), 并证明了 $c > \aleph_0$. 然后证明了一个具有基数 $\aleph_0$ 的集合中所有子集的集合的基数是 $2^{\aleph_0}$, 而且有 $c = 2^{\aleph_0}$. 他又引进了 $\aleph_0$ 的后继者 $\aleph_1$, 而且 $\aleph_1 \leq c$. 但是对于 $\aleph_1 = c$ 是否成立，他无法证明．事实上，这后来成为著名的连续统假设，在 1900 年的世界数学家大会上被 Hilbert 列为他的 23 个问题中的第一个． Cantor 的工作解决了不少经久未能解决的问题，也颠倒了许多前人的想法，自然不能立刻被人们接受．他的工作遭到了许多学者的反对和攻击，有人认为他的集合论是一个有趣的“病理学情形”，认为他是“疯子”，认为他的超限基数 $\aleph$ 是“雾中之雾”，更有甚者是他的老师 Leopold Kronecker (1823～1891) 竟然粗暴地攻击他达 10 年之久． Cantor 终于在这样的压力下精神崩溃，被送进了医院．然而也有很多人支持 Cantor, 其中最坚决的有 Hilbert, 他将 Cantor 的集合论思想在德国广为传播，他称赞 Cantor 的超限算术为“数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”， “没有人能把我们从 Cantor 为我们创造的乐园中开除出去”．哲学家、数学家 Bertrand Russell(1872～1970) 将 Cantor 的工作评价为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”．事实上，人们在对 Cantor 的工作争论的几乎同时就发现，他的思想不仅在分析中有重要应用，而且对测度论和拓扑学更是至关重要的.

点集理论本来并不涉及变换与拓扑性质．由于集合论的出现，人们开始把集合概念引入函数空间， Hilbert 空间、 Banach 空间相继出现，泛函分析迅速发展，人们开始认识到拓扑的重要性，并逐步抽象出在点集上添加空间结构以使得点与点之间具有空间联系的方法，这就是在点集上定义拓扑以形成拓扑空间．当然，在 Euclid 空间距离就是一种结构，对于一般的集合能否也给出一种结构呢？法国数学家 Maurice Fréchet (1878～1973)1906 年在他的博士论文中对泛函分析进行了深入的研究，把集合概念引入泛函分析，在函数空间中抽象出一种类似距离的概念，定义了距离空间，他可以在这样的定义下展开空间以及定义于其上的泛函的许多性质． Fréchet 指出，给点集以空间结构来“捆扎”其中的点，未必一定只能用 Euclid 的距离函数，可以抽象出许多与距离函数有相同性质的概念，从而推广了距离概念，引入了度量空间概念．甚至还可以利用邻域概念给出具有邻域的拓扑空间． Felix Hausdorff(1868～1942) 在他 1914 年出版的《点集论纲要》中也使用邻域概念建立了抽象空间的完整理论．可以说，点集拓扑或叫做一般拓扑就这么开始了．在 Fréchet, Hausdorff 和 Paul S. Urysohn (1898～1924), Poincaré, Luitzen E. J. Brouwer(1881～1967) 等以及许多当代数学家的共同努力下，一般拓扑学得以迅

速地发展完善，成为几何学大家庭的一个新的成员.

与点集拓扑一起发展起来的还有代数拓扑学，过去也叫做组合拓扑学. 在代数拓扑形成学科之前，就已经有许多数学家对代数拓扑中某些课题进行了研究. 比如在 17 世纪， Leibniz 就在他的《几何特性》里提出过某些想法， “我相信我们缺少另一门分析的学问，它是真正几何的和线性的，它能直接地表示位置，如同代数表示量一样”． Euler 于 1750 年发表了关于凸多面体的顶点数、棱数和面数的公式并于次年给出了证明，此即著名的 Euler 示性数公式，他试图用它来对多面体进行分类， 1735 年由 Euler 解决的 Königsberg 七桥问题，也是拓扑思想的体现． Gauss 经常谈到研究图形的基本性质的必要性，但是他本人没有实质性贡献，他的学生 Johann B. Listing(1806∼1882) 于 1848 年出版了《拓扑学的初步研究》，并在 1858 年发表了《空间复形的概述》，寻求几何图形的定性规律，企图推广 Euler 公式. 作为对拓扑研究的本性给出恰当提法的第一人 Möbius 也对多面体进行了研究， 1858 年，他和 Listing 各自独立地发现了单侧曲面，其中有著名的 Möbius 带. 属于拓扑范畴的还有一个著名的问题，即由一位名不见经传的数学家 Francis Guthrie 于 1852 年提出的 “四色问题”，这个看似简单的问题却难倒了全世界的数学家，至今还没能给出其理论证明 1). 随着 Riemann 几何的出现，就有了关于连通曲面亏格问题的研究以及与闭 Riemann 曲面拓扑等价曲面的研究，开展了在球面上加球柄或交叉帽以及 Klein 瓶、射影平面等闭曲面的研究.

前人研究成果的不断积累，为代数拓扑自立门户准备了条件，于是就出现了公认的代数拓扑奠基人 Poincaré. 他出生于法国的 Nancy, 小时候的神经系统疾病以及白喉给他留下了一些后遗症，他的视力和书写能力不及他人，但是他在课堂上全神贯注，完全靠听讲、记忆、思考，养成了能够在大脑中完成复杂计算、构思长篇论文的能力，成绩优秀. 上大学后先学工科，后迷于数学， 1878 年向巴黎科学院提交了探讨微分方程一般解的论文并以此于 1879 年获得数学博士学位. 之后，他先在 Caen 大学教数学分析，后受聘到巴黎大学教书，并于 1886 年升为巴黎大学数学和物理学教授． 1887 年入选巴黎科学院． Poincaré 从小到成人都被认为是一个 “笨人”，甚至当他被公认为数学家时，心理学家通过试验仍然给出他是一个 “笨人” 的结论.

从 19 世纪 90 年代起， Poincaré 开始发表拓扑学的论文，尽管他当时的文章漏洞百出，显然不符合数学的严密性 (当然，当时的代数、几何按现在的观点来看

---

1) 四色定理的机器证明： 1976 年，美国数学家 K. Appel, W. Haken 和 J. Koch 宣布，他们穷举各种情况，利用电子计算机耗费 1200 机时的计算证明了四色定理，其成果发表于 1977 年． K. Appel and W. Haken, *Every map is four-colorable, I, Discharging,* Illinois J. Math. 21(3)(1977), 429−490; K. Appel and W. Haken, *Every map is four-colorable, II, Reducibility,* Illinois J. Math. 21(3)(1977), 491−567.

也是不够严格的), 但是他从 1894 年到 1904 年的 10 年间发表的 6 篇代数拓扑方面的论文，却是代数拓扑的奠基性文献．他对一般曲面展开研究，定义了 Betti 数 (Eurico Betti(1823~1892), 意大利数学家), 发明了单纯形同调论的系统方法，推广了 Euler 公式，得到了 Euler-Poincaré 示性数，提出了同调概念，发现了流形同调的对偶定理，宣告代数拓扑的重要理论 —— 同调论的开始． Poincaré 在这些论文中还提出了复形的基本群概念，后来称为 Poincaré 群或第一同伦群，这个重要概念又引出了代数拓扑中的另一重要理论 —— 同伦论． Poincaré 还提出了一些重要的猜想，留给后人研究，有的已经解决，有的仍然没有解决．

Poincaré 在谈及他的研究工作心得时说：“如果一方面有意识的工作在它之前，另一方面又被有意识的工作尾随其后，那么这就是可能的，而且肯定是富有成果的．” Poincaré 是一个勇于创新，勇于奋斗的科学家，他说：“人生就是持续斗争”，“假如我们的精力、我们的警惕性松懈片刻，我们将失去先辈为我们赢得的斗争成果”．在其博士论文发表后的 34 年中，他大约发表了 500 篇论文，出版了 30 多部著作．美国数学史家 M. Kline 评价说：“他被认为是 19 世纪最末四分之一和 20 世纪初的领袖数学家，并且是对于数学及其应用具有全面知识的最后一个人．” Poincaré 撰写的大量研究论文、教材、通俗论文几乎涉及数学的所有基本领域，因此人们称他为数学全才，认为他的数学成就可与 Gauss 相比美．不仅如此，他还在理论物理、电磁理论、动力学、流体力学和天文学等诸多领域有过杰出的贡献．列宁在《唯物主义与经验批判主义》中称 Poincaré 是“一位卓越的物理学家、渺小的哲学家”． Poincaré 不仅赢得过法国政府的最高荣誉，还得到过英国、俄国、瑞典、匈牙利等国家政府的奖励．他一生担任过的外国科学院院士职务 30 多个，他的著作被译成十多种文字在世界上出版发行，他逝世后，巴黎科学院为他出版了《 Poincaré 全集》．

L. E. J. Brouwer 通过函数论的问题对拓扑产生了兴趣，他提出了关于复形的维数不变性，与他的名字相联系的“不动点定理”，已经发展成不动点理论．

拓扑学自 19 世纪后期产生伊始，就在全世界数学家的共同努力下开始迅猛发展，许多数学家为之做出了杰出的贡献．到 20 世纪前半叶，同调论、同伦论逐渐成熟，到 20 世纪 50 至 70 年代，微分拓扑又迅速地崛起，非常热门．如今，拓扑学已经渗透到数学的各个分支甚至数学以外的其他科学之中，由拓扑学的发展又带动产生了一些新的数学分支，如同调代数、范畴与函子等．

## §5.7 Hilbert 与《几何基础》

我们再次回到对 Euclid 《原本》的争论．自原本问世起的两千年中，对它的研究和争论就一直存在，除第五公设问题外，人们对 Euclid 的《原本》还在其对

于点、线、面等的定义，对于认为能够叠合的图形就是全等图形等诸多方面进行质疑，试图改善它的努力一直没有停止. 数学哲学家 Bertrand Russell 在 1902 年说："每当 Euclid 被考虑作为教科书，而由于他的冗长，他的晦涩，或者他的拘泥形式遭到攻击时，总是习惯于为他辩护，据以辩护的理由是：他的逻辑的优点是超群的，而且给不成熟的推理能力提供非常宝贵的训练. 然而，仔细地推敲一下，上述理由就化为乌有了. 他的定义并不总是下了定义的，他的公理并不总是不可证明的，他的证明需要许多他还没有完全意识到的公理. 一个正确的证明，即使没有画出图形，也仍然保持其论证的力量. 但在这个检验面前， Euclid 的许多早期的证明就站不住脚了 ······. "

19 世纪 70 年代，随着人们认识到射影几何是一门基础的几何学，几何基础的研究工作也就开始了. 人们最初是想先探求射影几何的基础，但是由于夹杂着同时要建立度量几何，所以这方面的研究工作都没有能按照不同的几何学分离开来.

在几何基础方面第一个值得提到的工作是 Moritz Pasch(1843∼1930), 他的《新几何学》出版于 1882 年，修订版出于 1926 年. 他对 Euclid 几何公理作了严密化处理，并给出了射影几何的一些公理. 对射影几何方面更令人满意的工作是由 Giuseppe Peano(1858∼ 1932) 给出的. 另外还有许多数学家对建立射影几何公理做出了贡献. 现代受到广泛认可使用的最多的是 Hilbert 几何公理系统.

David Hilbert(1862∼1943) 出生于东普鲁士的 Königsberg[1), 通过 Euler 解决奇妙的"七桥问题"使得数学与这个城市的名字联在了一起，数学界几乎没有人不知道 Königsberg. Hilbert 小时候并未有什么天才表现，只是对数学表现出强烈的兴趣. 他于 1880 年进入 Göttingen 大学读书，在大学期间，小他两岁的高一班学生 Hermann Minkowski(1864∼1909) 和副教授 Adolf Hurwitz(1859∼1919) 与 Hilbert 交往最多，他们三人每天下午准 5 点到校园里的苹果树下散步，交流学习心得、最新获得的成果、彼此的研究计划、数学界的大事等等，成就了彼此的科学理想，结成了终身的友谊. 大学生活的后期，以证明了 $\pi$ 是超越数而闻名于世的数学家 Ferdinand Lindemann(1852∼1939) 建议 Hilbert 以关于"不变量理论"的研究作为博士论文，他敢于向"不变量之王" Paul Gordan(1837∼1912) 挑战，以初步满意的结果于 1885 年 2 月 7 日取得博士学位，之后又继续这一领域的研究，终于在 1888 年取得了令数学界惊奇，令 Gordan 佩服的突出成就，以至于有的数学家说 Hilbert 扼杀了不变量的研究，因为他已经处理了所有的问题. 取得博士学位后他先后在德国、法国访问了许多数学家，其中包括 Klein, Poincaré 等， 1892 年到 Göttingen 大学接替 Hurwitz 担任副教授， 1895 年起担任 Göttingen 大学教授职务直到 1930 年退休，在他之前， Göttingen 大学数学教授这张椅子上还曾先后坐过

1) 即今俄罗斯的加里宁格勒.

Gauss, Riemann, Klein 等世界级大师.

Hilbert 是 20 世纪的领头数学家，在不变量理论、数论、积分方程、公理化理论、数学物理、数学基础等方面都有卓越贡献. 1900 年，第二届世界数学家大会在巴黎举行. Hilbert 在 8 月 8 日的大会邀请报告中提出了 23 个问题，后来被称为 “ Hilbert 问题”，出乎预料的是，这个报告竟然成了 20 世纪数学研究工作的纲领性文件. Minkowski 在给 Hilbert 的信中说：“世界上每个数学家无疑都会阅读你的讲演，通过这次讲演，我相信你对于青年数学家的吸引力将会大大增加 —— 如果还可能增加的话. ” 人们称颂 Hilbert 为数学世界的亚历山大, 无冕数学之王, Göttingen 的 Hilbert 墓碑上镌刻着这样的话：“我们必须知道，我们必将知道”. 在纪念 Hilbert 诞生 100 周年大会上，著名数学家 Richard Courand(1888～1972) 在讲演中说：“ Hilbert 以他感人的榜样向我们证明：…… 在纯粹数学与应用数学之间不存在鸿沟, 数学与科学总体之间能够建立起果实丰满的结合体. 因此我确信, Hilbert 那种有感染力的乐观主义，即使到今天也在数学中保持着它的生命力. 惟有 Hilbert 精神，才会引导数学继往开来，不断成功. ”

在 Euclid 几何的所有公理系统中，概念和陈述最简单、路子最接近 Euclid 而且最受人们欢迎的公理集是 Hilbert 的公理系统. Hilbert 的《几何基础》于 1899 年出版了第一版, 之后又经过了许多次的修改再版, 在他生前出到第七版. 1898 年冬天, 当 Göttingen 大学的学子们听说 Hilbert 教授将讲授几何基础, 都感到非常的惊讶，因为在此之前他一直是 “只谈数域”. 其实，他对几何基础的思考自 1891 年就已经开始了，那时他就对人说过：在一切几何命题中，“我们必定可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替点、线、面”.

Hilbert 认为无需给不定义的概念指定明确的意义，像点、线、面以及其他元素，可以用桌子、椅子、啤酒杯或者别的什么东西来代替. 他首先列出不定义的概念，点、线、面，位于 …… 上面，在 …… 之间以及一对点重合、角重合等. 然后给出了分为五组的公理系统.

**I. 关联公理**

$\mathrm{I}_1$. 对于每两个点 $A$ 和 $B$, 有一条直线 $a$ 位于它们上面.

$\mathrm{I}_2$. 对于每两个点 $A$ 和 $B$, 只有一条直线位于它们上面.

$\mathrm{I}_3$. 一条直线上至少有两个点. 不位于同一直线上的点，至少有三个.

$\mathrm{I}_4$. 对于不位于一条直线上的任意三点 $A, B$ 与 $C$, 都有一张平面 $\alpha$, 位于这三点上. 每一张平面至少有一个点.

$\mathrm{I}_5$. 对于不位于一条直线上的任意三点 $A, B$ 与 $C$, 只能有一张平面包含它们.

$\mathrm{I}_6$. 如果一条直线上有两个点位于平面 $\alpha$ 上，那么这条直线上所有的点都位于 $\alpha$ 上.

$\mathrm{I}_7$. 如果两张平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 有一个公共点 $A$, 那么它们至少还有另外一个点 $B$

是公共的.

$\mathrm{I}_8$. 不在同一张平面上的点，至少是四个点.

**II. 顺序公理**

$\mathrm{II}_1$. 如果一点 $B$ 位于点 $A$ 和 $C$ 之间，那么 $A, B$ 和 $C$ 是同一条直线上的三个不同的点，并且 $B$ 也位于 $C$ 和 $A$ 之间.

$\mathrm{II}_2$. 对于任意两点 $A$ 和 $C$, 直线 $AC$ 上至少有一点 $B$, 使 $C$ 位于 $A$ 和 $B$ 之间.

$\mathrm{II}_3$. 在一条直线上的任意三点中，只有一个点位于其他两点之间.

**定义** 设 $A$ 和 $B$ 是直线 $a$ 上的两点. 点对 $A, B$ 或者点对 $B, A$ 就叫做线段 $AB$. 位于 $A$ 和 $B$ 之间的点称为这线段的点或者这线段的内点. $A$ 和 $B$ 叫做这线段的端点. 直线 $a$ 上的所有其他的点都被说成是在这线段的外部.

$\mathrm{II}_4$. (Pasch 公理) 设 $A, B$ 和 $C$ 是不位于同一条直线上的三个点，并设 $a$ 是 $A, B, C$ 所在平面上不经过 (不位于)$A, B$ 或 $C$(上) 的任意一条直线. 如果 $a$ 经过线段 $AB$ 上的一个点，那么它必定还经过线段 $AC$ 上的或者线段 $BC$ 上的一个点.

**III. 合同公理**

$\mathrm{III}_1$. 如果 $A, B$ 是直线 $a$ 上的两个点， $A'$ 是 $a$ 上或另一条直线 $a'$ 上的一个点，那么在直线 $a'$ 上，在 $A'$ 的给定的一侧 (预先已经规定好), 可以找到一点 $B'$, 使线段 $AB$ 和线段 $A'B'$ 合同. 记为 $AB \equiv A'B'$.

$\mathrm{III}_2$. 如果 $A'B'$ 和 $A''B''$ 都与 $AB$ 合同，那么 $A'B' \equiv A''B''$.

$\mathrm{III}_3$. 设 $AB$ 和 $BC$ 是直线 $a$ 上没有公共内点的两条线段, 并设 $A'B'$ 和 $B'C'$ 是直线 $a'$ 上没有公共内点的两条线段. 如果 $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$, 那么 $AC \equiv A'C'$.

$\mathrm{III}_4$. 设 $\angle(h, k)$ 位于平面 $\alpha$ 中，并设直线 $a'$ 位于平面 $\alpha'$ 中， $a'$ 在 $\alpha'$ 中的确定的一侧已经给出. 设 $h'$ 是从 $a'$ 上的点 $O'$ 出发的射线. 则在 $\alpha'$ 中有且只有一条射线 $k'$, 使 $\angle(h, k)$ 和 $\angle(h', k')$ 合同，且 $\angle(h', k')$ 的所有内点都位于 $a'$ 的给定的一侧. 每一个角与其自身是合同的.

$\mathrm{III}_5$. 在两个三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 中, 如果 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, 那么 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

**IV. 平行公理**

设 $a$ 是一条直线， $A$ 为不在 $a$ 上的一个点. 那么在 $a$ 和 $A$ 所在的平面上，最多只有一条经过 $A$ 并与 $a$ 不相交的直线.

**V. 连续性公理**

$\mathrm{V}_1$. (Archimedes 公理) 如果 $AB$ 和 $CD$ 是任意两条线段，那么在直线 $AB$ 上存在若干个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 使得线段 $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$ 都与 $CD$ 合同，并使 $B$ 位于 $A$ 和 $A_n$ 之间.

$V_2$. (直线完备性公理) 直线上的点构成一个满足公理 $I_1, I_2$, II, III 和 $V_1$ 的点集，而且不可能再把它扩大成一个继续满足这些公理的更大的集合.

Hilbert 的《几何基础》第七版包括五组公理，公理的相容性和相互独立性，比例论，平面上的面积论， Desargues 定理， Pascal 定理，根据公理的几何作图等内容. 在给出了五组公理之后， Hilbert 指出，作为一个完整的几何公理系统，它必须满足下列的逻辑要求：

相容性. 从这些公理出发不可能推出任何相互矛盾的定理.

独立性. 如果从这组公理中删去任何一条公理，至少就会有某些定理不可能得到证明.

完备性. 所有的定理都可以由这些公理推出.

Poincaré 认为 Hilbert 的《几何基础》是一部经典之作. 他说，当代有些几何学家觉得：在承认以否定平行公设为基础的可能的非欧几何方面，他们已经达到了极限. 如果他们读一读 Hilbert 教授的这部著作，那么这种错觉就会消除，在这部著作中，他们将会发现：他们作茧自缚的屏障，已经被彻底冲垮了.

无独有偶， Hilbert 在研究几何基础的同时，也对实数系的处理提出了一个公理方法. 我们将他的公理列于下面，以便读者将其与几何公理相比较. 在列出这些公理之前， Hilbert 还介绍了不定义的词以及用 $a, b, c$ 等代表数.

**I. 连接公理**

$I_1$. 从数 $a$ 与数 $b$ 经过加法产生一个确定的数 $c$, 用符号表出便是

$$a+b=c \quad \text{或} \quad c=a+b.$$

$I_2$. 若 $a$ 与 $b$ 是给定的两数，则存在惟一的一个数 $x$ 与惟一的一个数 $y$, 使

$$a+x=b \quad \text{与} \quad y+a=b.$$

$I_3$. 存在一个确定的数，记为 0, 使得对每一个数 $a$ 都有

$$a+0=a \quad \text{与} \quad 0+a=a.$$

$I_4$. 从数 $a$ 与数 $b$ 经过另一方法，乘法，产生一个确定的数 $c$, 用符号表出便是

$$ab=c \quad \text{或} \quad c=ab.$$

$I_5$. 若 $a$ 与 $b$ 是任意给定的两数，且 $a$ 不是 0, 则存在惟一的一个数 $x$ 与惟一的一个数 $y$, 使

$$ax=b \quad \text{与} \quad ya=b.$$

$\mathrm{I}_6$. 存在一个确定的数，记为 1, 使得对每一个数 $a$ 都有

$$a \cdot 1 = a \quad 与 \quad 1 \cdot a = a.$$

**II. 运算公理**

$\mathrm{II}_1$. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

$\mathrm{II}_2$. $a + b = b + a$.

$\mathrm{II}_3$. $a(bc) = (ab)c$.

$\mathrm{II}_4$. $a(b + c) = ab + ac$.

$\mathrm{II}_5$. $(a + b)c = ac + bc$.

$\mathrm{II}_6$. $ab = ba$.

**III. 顺序公理**

$\mathrm{III}_1$. 若 $a$ 与 $b$ 是任意两个不同的数，则其中一个必定大于另一个，称后者小于前者. 用符号表出便是

$$a > b \quad 与 \quad b < a.$$

$\mathrm{III}_2$. 若 $a > b$ 且 $b > c$, 则 $a > c$.

$\mathrm{III}_3$. 若 $a > b$, 则下述关系成立

$$a + c > b + c \quad 与 \quad c + a > c + b.$$

$\mathrm{III}_4$. 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$ 与 $ca > cb$.

**IV. 连续公理**

$\mathrm{IV}_1$. (Archimedes 公理) 若 $a > 0$ 与 $b > 0$ 是两个任意的数，则总可以把 $a$ 自己相加足够的次数使

$$a + a + \cdots + a > b.$$

$\mathrm{IV}_2$. (完备公理) 对于数系，不可能加入任何集合的元素使加入后的集合满足前述公理. 扼要地说，数构成一个对象系，它在保持上述公理全部成立的情况下不能扩大.

Hilbert 指出，这些公理并不是相互独立的. 但是可以肯定，在上述的实数概念下，那些反对无限集合存在的论点是站不住脚的. 不过当时 Hilbert 没有觉察到，实数公理的相容性是很难证明的.

Hilbert 的《几何基础》激起了数学界的“公理化”研究热潮，许多数学家尝试了在不同的数学分支中推行公理化方法.

重建几何基础，并没有能够解决所有的问题，曲线问题就是一例. 有些曲线是靠方程和函数引进的，比如 Karl Weierstrass(1815~1897) 曾定义了一种函数曲线，它处处连续但是却处处不可微，也就是这曲线在任何点都没有切线. 再比如关于

Jordan 闭曲线， 1890 年， Peano 发现符合 Jordan 定义的曲线却可以布满整个正方形区域，后来称之为 Peano 曲线． Hilbert 也曾给出一个从单位线段到正方形上的连续映射的例子． Helge von Koch(1870～1924) 于 1906 年给出了一条闭曲线，它处处连续且处处不可微，可以围住一块有限面积，但是它的长度却是无穷大．这些例子不仅使得面积问题出现了复杂化，也对维数概念提出了挑战．随着 20 世纪后期分形几何的诞生与发展，这些问题都得到了清晰的认识和合理的解释．但是，宇宙之大，无边无际，宇宙的奥秘无穷无尽，因此几何学的发展必将永无止境．

# 参 考 文 献

[1] Frank Ayres, Jr. Schaum's Outlines of Theory and Problems of Projective Geometry. McGraw-Hill Book Company, 1968

[2] 邓宗琦．数学家辞典．武汉：湖北教育出版社， 1990

[3] 方德植，陈奕培．射影几何．北京：高等教育出版社， 1983

[4] M. Kline. 古今数学思想. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社, 1979

[5] 李文林．数学珍宝 —— 历史文献精选．北京：科学出版社， 1998

[6] 梅向明，刘增贤，林向岩．高等几何．北京：高等教育出版社， 1983

[7] 梅向明，刘增贤，林向岩，王智秋．高等几何习题集．北京：高等教育出版社， 1994

[8] 吴文俊．世界著名科学家传记．北京：科学出版社， 1992

[9] 叶惟寅，周兴和．大学数学．苏州：苏州大学出版社， 2000

[10] 叶惟寅，周兴和．大学数学自学辅导．苏州：苏州大学出版社， 2000

[11] 钟集．高等几何．北京：高等教育出版社， 1983

[12] 朱德祥．高等几何．北京：高等教育出版社， 1983